筑波大学理工学群　工学システム学類

令和5年度編入学試験

学力検査問題

(150分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は，この表紙を含めて6ページあり，専門科目（数学，物理学）の各問題がまとめられています。
3. 問題数は，数学が2問，物理学が2問です。
4. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に，「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」を記入してください。
5. 解答に際しては，数学，物理学の各問題で，別々の解答用紙を用いて下さい。解答用紙は，裏面を用いても構いません。
6. 解答用紙の上部の $\boxed{}$ 内に，数学問題1，数学問題2，物理学問題1，物理学問題2と記入し，各問題に小問がある場合には，それらの小問の解答を全て要領良く記述して下さい。

数学１　試験問題

１．以下の設問に答えよ。ここでiは虚数単位とする。

(1) マクローリン展開を用いてオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を示せ。ここでxは実数とする。

(2) $\alpha^m = e^{\left(-1-i\frac{\pi}{2}\right)m}$について，$\alpha^m = a_m + ib_m$の形（$a_m$，$b_m$は実数）で表すことを考える。
① $m = 1$，② $m = 2$，③ $m \geq 3$の整数，のそれぞれの場合におけるa_m，b_mを求めよ。

(3) 積分$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \sin 4x \, dx$（$n$は整数）の値を求めよ

２．xy平面にて，媒介変数θ（$0 \leq \theta \leq 2\pi$）を用いて，曲線Cを$x = \theta - \sin\theta$，$y = 1 - \cos\theta$と定義するとき，以下の設問に答えよ。

(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$の点における曲線Cの接線を求めよ。

(2) 曲線Cとx軸で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3) x軸，y軸，z軸が右手系をなすようにz軸を導入して 3 次元直交座標系を考える。曲線Cをx軸まわりに 1 回転させて得られる回転体の表面をSとする。このときS上の点は，θとx軸まわりの回転角γ（$0 \leq \gamma \leq 2\pi$）を用いて

$$x = \theta - \sin\theta,\ \ y = (1 - \cos\theta)\cos\gamma,\ \ z = (1 - \cos\theta)\sin\gamma$$

と表せる。
表面S上の，$\theta = \gamma = \frac{\pi}{3}$の点における接平面の単位法線ベクトルを，
x，y，z各軸方向の基本ベクトル $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$を用いて表せ。

数学２　試験問題

行列$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$について，以下の問いに答えよ。

(1)　Aの固有値λ_1，λ_2，λ_3，λ_4を求めよ。ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \lambda_4$とする。

(2)　Aの正規直交化された４つの固有ベクトルを求めよ。ただし，すべての固有ベクトルの第１成分を０以上となるように求めよ。重解の固有値がある場合には，その固有値に対するすべての固有ベクトルは，第１成分に加えて，第２成分も０以上になるように求めよ。

(3)　Aを$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$の形に対角化する直交行列$P$，およびその逆行列$P^{-1}$を求めよ。

(4)　ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ が常微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t) = -A\boldsymbol{x}(t),\ \ \boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

を満たす。$\boldsymbol{y}(t)=P^{-1}\boldsymbol{x}(t)$とおき，$\boldsymbol{y}(t)$，$\boldsymbol{x}(t)$を求めよ。

物理学１　試験問題

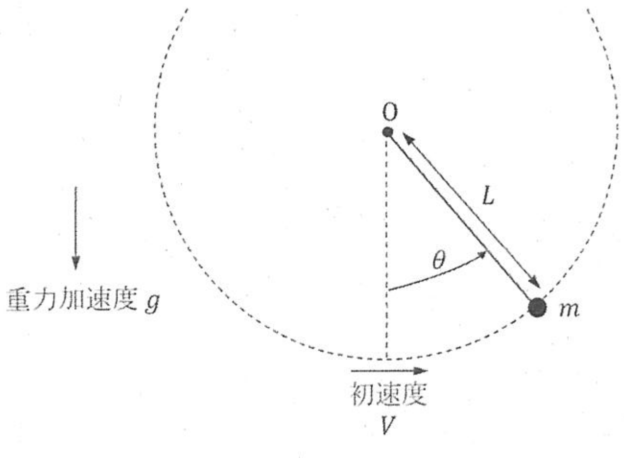
１．図に示すように，質量を無視できる長さLの棒の一端が点Oにあり，もう一端に質量mの質点がある。棒は点O周りに滑らかに鉛直面内（紙面内）を回転できる。棒の回転角をθ，時間をt，重力加速度をgとする。棒と質点に作用する空気抵抗は無視する。

棒が$\theta = 0$で静止しているときに，質点に大きさVの初速度を水平方向に与える。

各問に解答する際には次より必要なものを用いること：

L，m，g，V，θ，t，$\frac{d\theta}{dt}$，$\frac{d^2\theta}{dt^2}$

(1) 質点の速度と加速度の周方向（θ方向）成分をそれぞれ示せ。
(2) 質点の周方向（θ方向）の運動方程式を示せ。
(3) 質点の運動に関するエネルギー保存則を(2)で求めた運動方程式より導出せよ。
(4) 初速度$V = v_0$を与えたところ，質点は振れ角が非常に小さい振り子運動をした。この運動の周期T_0を導出過程とともに示せ。
(5) (4)で与えた初速度$V = v_0$よりも大きい初速度$V = v_1$を与えたところ，質点は振れ角の振幅θ_1が$\pi/3$，周期T_1の振り子運動をした。T_0とT_1の大小関係を示し，その理由を説明せよ。



図

物理学 2　試験問題

原点 O を中心とした半径a，bの導体球殻 A，B を考える（$a < b$，図 1）。球殻の厚さは無視できるものとし，以下の問いに答えよ。

(1) A と B を絶縁しておき，電荷の自然な流入・消失はないとする。また，最初はどちらも電荷をもっていないとする。球内外の誘電率をε_0，無限遠での電位を 0 とする。

(a) 外側の B に一様に電荷Q（> 0）を与えたとき，原点からの距離rにおける動径方向の電場の成分$E(r)$と電位$\phi(r)$を$0 < r < a$，$a < r < b$，$b < r$の各領域で求めよ。

(b) 次に，A と B を導線でつないで電気的に接続したところ，電荷の移動は観測されなかった。その理由を説明せよ。

(2) 次に，クーロン力の距離依存性が逆二乗則でない場合も考えるため，2 つの電荷q_1，q_2の間にはたらく力を$f(r_{12})q_1q_2$と定義する。r_{12}は 2 つの電荷間の距離である。2 つの電荷の間にはたらく力は両者を結ぶ直線の方向を向き，$q_1q_2 > 0$のときは斥力，$q_1q_2 < 0$のときは引力とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(a) 電荷Q（> 0）が一様に分布した球殻 B がある。図 2 のように，その内部の点$\mathrm{P}(0,0,z_0)$（直交座標，$0 < z_0 < b$）に点電荷q（> 0）があるとする。B 上の点を極座標で$\mathrm{P}'(b,\theta,\phi)$とし，P と P$'$との距離を$r$としたとき，点電荷$q$と球殻 B 上の点P$'$のまわりの微小面積$b^2\sin\theta d\theta d\phi$に含まれる電荷との間にはたらく力の$z$成分を求めよ。ただし，$q$は十分に小さく電荷$Q$は球殻 B に一様に分布したままであるとする。

(b) 次に，球殻 B と点電荷qとの間にはたらく力の大きさが

$$F(z_0) = \frac{qQ}{4b{z_0}^2}\int_{b-z_0}^{b+z_0} f(r)\,({z_0}^2 - b^2 + r^2)dr$$

となることを示せ。

(c) 次に，$f(r) = C_3r^{-3}$のときの$F(z_0)$を求めよ。また，逆二乗則$f(r) = C_2r^{-2}$のときの$F(z_0)$も求めよ。C_2，C_3は正の比例定数である。

次ページへ続く

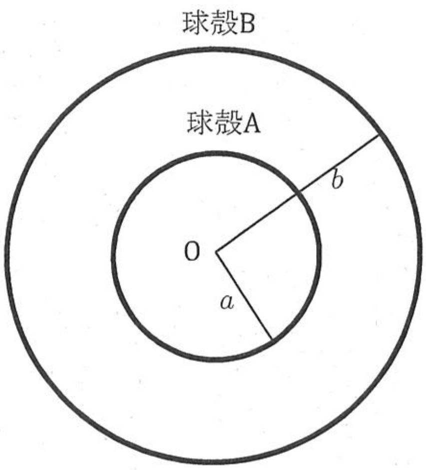

球殻B
球殻A
O
b
a

図 1

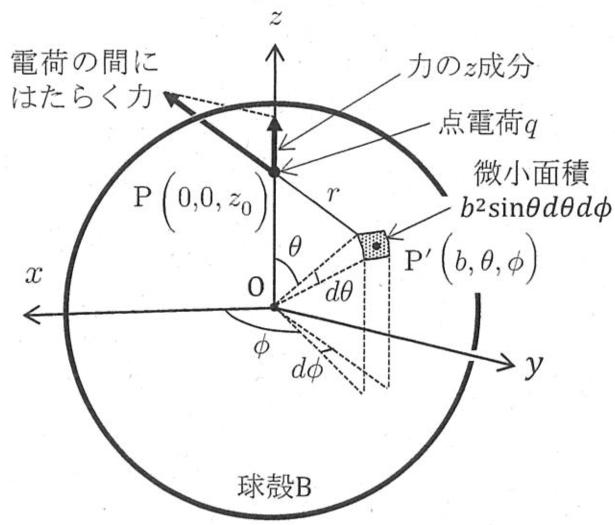

z
電荷の間に
はたらく力
力のz成分
点電荷q
微小面積
$b^2\sin\theta d\theta d\phi$
$\mathrm{P}\left(0,0,z_0\right)$
r
θ
x
O
$d\theta$
$\mathrm{P}'\left(b,\theta,\phi\right)$
ϕ
$d\phi$
y
球殻B

図 2