令和5年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　【理工学群　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題1 解答例	(1) 以下の固有方程式： $$\det(\lambda E - A) = (\lambda - 0.6)(\lambda - 1) = 0$$ を解くことにより，固有値は $\lambda = 0.6, 1$ と求まる． (2) 各固有値に対して， $$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$ を満たす固有ベクトル $\boldsymbol{x}\,(\neq \boldsymbol{0})$ を求める．例えば，次のようなベクトルが求まる： $\lambda = 0.6$ のとき，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\lambda = 1$ のとき，$\boldsymbol{x} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$． (3) 漸化式を変形すると， $$\boldsymbol{x}_n = A^n \boldsymbol{x}_0$$ である．この式のべき乗を計算するために，行列の対角化を行う．(2) で求めた固有ベクトルを並べた行列を P とすると，行列 P は正則であるため，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$が成り立つ．従って， $$A^n = P\begin{bmatrix} 0.6^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix}P^{-1}$$ このべき乗を上記の式に代入して $n \to \infty$ とすると， $$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}\boldsymbol{x}_0 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ である．これは固有値 1 に対応する固有ベクトルであり，題意が示された． (4) $(I - B)\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{0}$ が非自明解 $\boldsymbol{y}^*$（$\neq \boldsymbol{0}$）を持つためには，行列 $(I - B)$ が非正則行列である必要がある．つまり，$\det(I - B) = 0$ であることを示せばよい． 　ここで，行列 B の各列の成分の和が 1 となるので，行列 $(I - B)$ の各列の成分の和はゼロである．これは，行列 $(I - B)$ の少なくとも 1 つの行は線形従属であることを意味する．従って，$\det(I - B) = 0$ であり，$B\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y}^*$ を満たすベクトル $\boldsymbol{y}^*$（$\neq \boldsymbol{0}$）が存在することが示された．

令和5年度

試験名:学群編入学試験　　　　　　　　【理工学群　社会工学類】

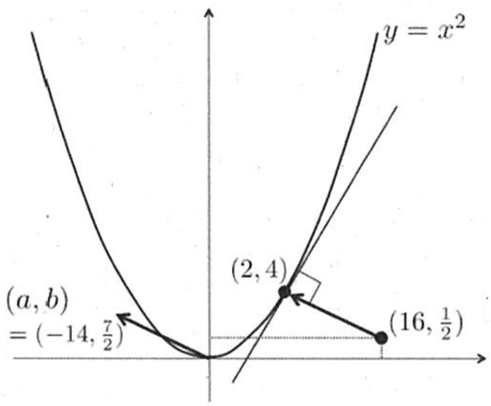
区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題2 解答例	(1) L が単射であるとは，任意の $x, y \in V$ に対して、$L(x) = L(y)$ ならば $x = y$ となることをいう．L が全射であるとは任意の $y \in V$ に対して $L(x) = y$ となる $x \in V$ が存在することをいう． (2) 像 $L(V)$ の次元が，V の次元より厳密に小さくなる線形写像は全て正解。例えば常に値が $\mathbf{0}_V$ となる写像は明らかに線形で，$L^{-1}(\{\mathbf{0}_V\}) = V \neq \{\mathbf{0}_V\}$ なので L は単射でない ($\because$ 線形写像が単射である事の必要十分条件はカーネルが 0 次元である事). (3) まず L が全射であるとすると $L(V) = V$ なので，次元定理より $\dim(\mathrm{Ker}L) = 0$ となる．よって $\mathrm{Ker}L = \{\mathbf{0}_V\}$ なので L は単射である．逆に，L が単射であるとすると $\mathrm{Ker}L = \{\mathbf{0}_V\}$ なので，次元定理より $\dim(\mathrm{Im}L) = \dim(V)$ となる．V と同じ次元をもつ V の部分空間は V しかないので $\mathrm{Im}L = V$ である．よって L は全射である．

令和5年度
試験名：学群編入学試験　　　　　　　　【理工学群　社会工学類】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
問題3 解答例	(1) 積分順序を変更して計算すると， $$\int_0^1 dy \int_y^1 6y^2 e^{x^2} dx = \int_0^1 dx \int_0^x 6y^2 e^{x^2} dy = \int_0^1 dx \left[2y^3 e^{x^2}\right]_0^x = \int_0^1 2x^3 e^{x^2} dx$$ ここで，$t = x^2$ とおき，置換積分すると， $$\int_0^1 2x^3 e^{x^2} dx = \int_0^1 t e^t dt = 1.$$ (2) 極座標変換して計算すると， $$\iint_{x^2+y^2\geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\infty} r^{(1-\alpha)} dr = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\alpha-2} & if \quad \alpha > 2 \\ \infty & if \quad \alpha \leq 2 \end{cases}.$$

令和5年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　　　【理工学群　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題4 解答例	(1) 距離 $\sqrt{(x-16)^2+(y-\frac{1}{2})^2}$ を制約 $y-x^2=0$ の元で最小化する問題を解けばよいので，ラグランジュ関数は $L(x,y,\lambda)=\sqrt{(x-16)^2+(y-\frac{1}{2})^2}+\lambda(y-x^2)$ である．点 $(2,4)$ への距離が最小となる． (2) 点 $(16,\frac{1}{2})$ から点 $(2,4)$ へのベクトル $(-14,\frac{7}{2})$ は，$y=x^2$ のグラフと $(2,4)$ で接する接線と直交する．これを図示すると以下のようになる．  (3) $x=2$ における $y=x^2$ の接線の傾きは4なので，この接線は $(1,4)$ が生成する部分空間を平行移動したものになっている．$(1,4)$ と $(-14,\frac{7}{2})$ の内積は， $$-14+\frac{28}{2}=0$$ なので，確かに直交していることがわかる．

令和5年度

試験名:学群編入学試験　　　　　　　　**【理工学群　社会工学類】**

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
問題5 解答例	(1) A 市と B 市の個人普及率をそれぞれ p_1, p_2 とおく．$H_0 : p_1 = p_2$ を $H_1 : p_1 \neq p_2$ に対して検定する．$\bar{p}_1 = 80/600 = 0.1333, \bar{p}_2 = 80/400 = 0.20, \bar{p} = \frac{80+80}{600+400} = 0.16$ なので $$T = \frac{0.1333 - 0.20}{\sqrt{0.16 \times 0.84 \times (1/600 + 1/400)}} = -2.8186$$ したがって $\lvert T \rvert = 2.8186 > 1.96 = z(0.025)$ より H_0 は棄却される． (2) $\bar{p}_1 - \bar{p}_2 \pm 1.96\sqrt{\frac{\frac{80}{600}\times\frac{520}{600}}{600} + \frac{\frac{80}{400}\times\frac{320}{400}}{400}}$ を計算して信頼区間は $\left[-0.0667 - 1.96\sqrt{\frac{2}{15^3}}, -0.0667 + 1.96\sqrt{\frac{2}{15^3}}\right]$ となる．

令和5年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　　　【理工学群　社会工学類】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
問題6 解答例	(1) $f(x) = 1/\theta\ (0 \leq x \leq \theta)$ であるので， $$E[X_i] = \int_0^\theta x f(x) dx = \frac{\theta}{2}.$$ (2) 標本からの推定量の期待値は， $$E[T_1] = E[c\bar{X}] = \frac{c}{n}(E[X_1] + \cdots + E[X_n]) = \frac{c\theta}{2}$$ である．従って，$c = 2$ のとき，T_1 は θ の不偏推定量である． (3) Y の分布関数を $G(y)$ とすると， $$G(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(\max(X_1, \cdots, X_n) \leq y) = \Pr(X_1 \leq y) \cdots \Pr(X_n \leq y) = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n$$ である．従って，確率密度関数 $g(y)$ は， $$g(y) = G'(y) = \frac{ny^{(n-1)}}{\theta^n} \quad (0 \leq y \leq \theta).$$ (4) まず，(3) より $$E[Y] = \int_0^\theta y g(y) dy = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^n dy = \frac{\theta n}{n+1}.$$ 従って， $$E[T_2] = E[\alpha_n Y] = \alpha_n \frac{\theta n}{n+1}$$ であり，$\alpha_n = 1 + \frac{1}{n}$ のとき，T_2 は θ の不偏推定量である．