

令和5年度

理工学群 数学類
推薦入試

小論文
試験問題

注意事項

- ① 試験時間は120分です。全部で3問あり、すべてに解答してください。
- ② 問題ごとに解答用紙1枚ずつを使用し、各解答用紙の左上に問題の番号を明記してください。
- ③ 解答が書ききれない場合は、「裏へ」と明記した上で、その解答用紙の裏面に続けて書いてください。ただし、上部は5, 6cm程あけてください(採点時には隠れてしまいます)。

問題 I 実数 a に対して 2 次関数 $f(x)$ と $g(x)$ を

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 2(a+2)x + 4a + 8 \\g(x) &= -x^2\end{aligned}$$

と定める。以下の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $f(x) \geq g(x)$ がすべての実数 x について成り立つような a の値の範囲を求めよ。
- (2) 不等式 $g(x) > f(x)$ を満たす実数 x が存在するような a の値の範囲を求めよ。
- (3) 不等式 $f(x) \geq g(y)$ がすべての実数 x, y について成り立つような a の値の範囲を求めよ。
- (4) 不等式 $f(x) \geq g(x)$ を満たす実数 x が存在するような a の値の範囲を求めよ。

問題 II 座標平面において、点 $(0, 0)$ を中心とし半径が 2 の円 A と、点 $(5, 0)$ を中心とし半径が 1 の円 B について、以下の問いに答えよ。

- (1) A と B のどちらにも外接する円 C の中心の軌跡を求めよ。
- (2) A と B がともに内接する円 D の中心の軌跡を求めよ。
- (3) B と (1) の円 C の接点の x 座標が動く範囲を求めよ。

問題 III 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n \left(1 - \frac{a_n}{n}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n について $0 < a_n < 1$ であることを証明せよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \log n$ を求めよ。