令和5年度

試験名：私費外国人留学生入試　　　　　　　　【理工学群 応用理工学類】

<table>
<tr><th>区　分</th><th>標準的な解答例又は出題意図</th></tr>
<tr><td>小論文
問題 1
問 1</td><td>

(1)

$$\int_0^{\log 7} \frac{e^x}{2+e^x}dx = \int_0^{\log 7} \frac{(2+e^x)'}{2+e^x}dx = [\log(2+e^x)]_0^{\log 7}$$

$$= \log(2+e^{\log 7}) - \log(2+e^0) = \log 9 - \log 3 = 2\log 3 - \log 3 = \log 3$$

(2)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 3\cos x)^3 dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + 9\sin^2 x\cos x + 27\sin x\cos^2 x + 27\cos^3 x)dx$$

ここで，$\sin^3 x, \sin x\cos^2 x$ は奇関数，$\sin^2 x\cos x, \cos^3 x$は偶関数より

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 3\cos x)^3 dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (9\sin^2 x\cos x + 27\cos^3 x)dx$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x\cos x + 3\cos^3 x)dx = 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + 3\cos^2 x)\cos x\,dx$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + 3(1-\sin^2 x))\cos x\,dx = 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3-2\sin^2 x)\cos x\,dx$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3-2\sin^2 x)(\sin x)'dx = 18\left[3\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 18(3-\frac{2}{3}) = 42$$

(3)

$x = \sqrt{a}\tan\theta$ とおくと$dx = \frac{\sqrt{a}}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \to \sqrt{a}$
θ	$0 \to \pi/4$

$$\int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}}dx = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{(x^2+a)^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}(\tan^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\,d\theta = \frac{1}{a}[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2a}$$

</td></tr>
</table>

問題 1
問 2

(1)

2 点からの距離の和が一定の点が描く軌跡はだ円となる。x軸とy軸との交点を，それぞれ$(\pm x_1, 0)$と$(0, \pm y_1)$，$(x_1, y_1 \geq 0)$とすると，

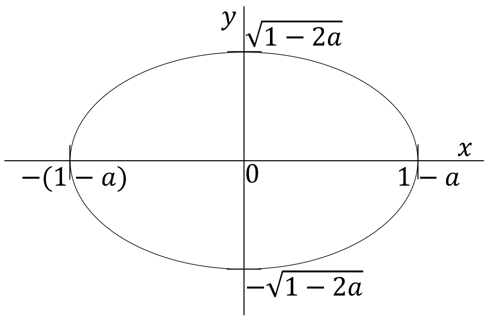
$2(a + x_1) = 2$ 　　より　　 $x_1 = 1 - a$

$2\sqrt{a^2 + y_1^2} + 2a = 2$ 　　より　　 $y_1 = \sqrt{1 - 2a}$

よって，図形の概形は右の通りとなり，面積S_1は,

$$\pi(1 - a)\sqrt{1 - 2a}$$

となる。



(2)

$S_1(0) = \pi$，$S_1(1/2) = 0$

$S'_1 = -\pi \dfrac{2 - 3a}{\sqrt{1 - 2a}}$ 　　より，$0 < a < 1/2$の区間において，S_1は単調減少である。

従って，S_1が取り得る範囲は，$0 < S_1 < \pi$となる。

(3)

点 A がx軸上にある時を除いて，点 A が線分 AB，BC，CA が囲む領域は三角形となる。点 A の座標を$(\pm x_2, \pm y_2), (x_2, y_2 \geq 0)$とすると，

面積S_2は，　$S_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot y_2 = a y_2$ 　　となる。

よって，任意のaについてS_2が最大となるときの点 A の座標は$\left(0, \pm\sqrt{1 - 2a}\right)$，$S_2$は$S_2(a) = a\sqrt{1 - 2a}$である。増減表は次の通りとなり，$S_2$が最大となるのは,

$a = \dfrac{1}{3}$ 　，　点 A の座標が　$\left(0, \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 　のときである。

(4)

点 A の座標を$(\pm x_3, \pm y_3), (x_3, y_3 \geq 0)$とすると，

回転体の体積Vは，　$V = \dfrac{2}{3}\pi a {y_3}^2$ 　　となる。

よって，任意のaについてVが最大となるときの点 A の座標は$\left(0, \pm\sqrt{1 - 2a}\right)$である。

$V = -\dfrac{4}{3}\pi\left(a^2 - \dfrac{1}{2}a\right)$ 　　$V' = -\dfrac{4}{3}\pi\left(2a - \dfrac{1}{2}\right)$ 　　より

増減表は次の通りとなり，Vが最大となるのは,

$a = \dfrac{1}{4}$ 　，　点 A の座標が　$\left(0, \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 　のときである。

問題 2	(1) 点 P におけるUを，m，g，R，θを用いて表せ。 図より、点 P における高さ$h = R - R\cos\theta$ $\therefore U = mgh = mgR(1-\cos\theta)$ (2) vをv_0，R，g，θを用いて表せ。 力学的エネルギー保存則より $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta)$ $\therefore v^2 = v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)$ $\therefore v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}$ (3) Nをm，v_0，R，g，θを用いて表せ。 動径方向の運動方程式は $m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta$ $\therefore N = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta$ $= m\frac{v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)}{R} + mg\cos\theta$ $= m\frac{v_0^2}{R} - 2mg(1-\cos\theta) + mg\cos\theta$ $= \ m\frac{v_0^2}{R} + mg(3\cos\theta - 2)$ (4) v_0の最小値を求めよ レールから離れることなく点 B まで到達するためには、B において$N(\theta=\pi) \geq 0$となる必要がある。 $N(\theta=\pi) = m\frac{v_0^2}{R} + mg(3\cos\pi - 2)$ $= m\frac{v_0^2}{R} + mg(-3-2)$

問題 2（つづき）	
	$= m\dfrac{v_0^2}{R} - 5mg \geq 0$ $\therefore v_0^2 \geq 5gR$ $\therefore v_0 \geq \sqrt{5gR}$ よって、求める最小値は $v_0 = \sqrt{5gR}$ (5) GA 間の距離の最小値を求めよ。 まず、GA 間の距離 L を求める。 最上点 B における速度v_{B}は、 $v_{\mathrm{B}} = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1-\cos\pi)} = \sqrt{v_0^2 - 4gR}$ B から G まで到達するのにかかる時間tは $t = \sqrt{\dfrac{2\times 2R}{g}} = 2\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ よって、 $L = v_{\mathrm{B}} \times t = \sqrt{v_0^2 - 4gR} \times 2\sqrt{\dfrac{R}{g}} = 2\sqrt{\dfrac{R(v_0^2 - 4gR)}{g}}$ ここで、$v_0^2 \geq 5gR$だから $L = 2\sqrt{\dfrac{R(v_0^2-4gR)}{g}} \geq 2\sqrt{\dfrac{R(5gR-4gR)}{g}} = 2\sqrt{\dfrac{g(R\times R)}{g}} = 2R$ $\therefore L \geq 2R$ よって、求める最小値は $L = 2R$ (6) v_0を求めよ。 $\theta = 120°$でレールから離れるとき，$N(\theta = 120°) = 0$となる。 $N(\theta = 120°) = m\dfrac{v_0^2}{R} + mg(3\cos(120°) - 2)$ $= m\dfrac{v_0^2}{R} + mg\left(3\left(-\dfrac{1}{2}\right) - 2\right)$ $= m\dfrac{v_0^2}{R} - \dfrac{7}{2}mg = 0$ $\therefore v_0^2 = \dfrac{7}{2}gR$ $\therefore v_0 = \sqrt{\dfrac{7}{2}gR}$

問題２（つづき）

(7) GA 間の距離を求めよ。

$\theta = 120°$のとき小球の速さv'は

$$v' = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos\ 120°\ )}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}gR - 2gR\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{7}{2}gR - 3gR}$$

$$= \sqrt{\frac{gR}{2}}$$

さて、レールから離れる点を原点とし、左方向および上方向をx軸およびy軸の正とする座標を考える。小球がレールから離れる時の速度ベクトルのx成分v_xとy成分v_yは、図 1 を参考にすると、それぞれ

$$v_x = v' \cdot (-\cos\ 120°\ ) = \sqrt{\frac{gR}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}}$$

$$v_y = v' \cdot \sin\ 120° = \sqrt{\frac{gR}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3gR}{2}}$$

である。

小球がレールから離れ最初に床に到達するまでかかる時間をt'とすると、到達地点の小球の座標は、

$$x = v_x \times t'$$

$$y = -(R - R\cos\ 120°\ ) = -\frac{3R}{2}$$

さて、y方向に対し小球は放物運動を行うので、

$$y = v_y t' - \frac{1}{2}gt'^2$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3gR}{2}}t' - \frac{1}{2}gt'^2$$

$$= -\frac{3R}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}gt'^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3gR}{2}}t' - \frac{3R}{2} = 0$$

$$\therefore gt'^2 - \sqrt{\frac{3gR}{2}}t' - 3R = 0$$

二次方程式の解の公式より

$$t' = \frac{\sqrt{\frac{3gR}{2}} + \sqrt{\frac{3gR}{2} - 4g\ -3R}}{2g}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{27}{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$

問題 2（つづき）	$= \sqrt{\frac{6R}{g}}$ よって、 $x = v_x \times t' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gR}{2}} \cdot \sqrt{\frac{6R}{g}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ 以上より、到達地点の座標は$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R, -\frac{3}{2}R\right)$であるが、これは点 A の座標である。よって、求める GA 間の距離は 0 である。