筑波大学理工学群社会工学類

令和５年度

編入学試験

学力検査問題

（数学）

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題の中身を見てはいけません．

2. すべての解答用紙（罫紙）と下書き用紙の定められた欄に，志望する「学群・学類」,「氏名」,「受験番号」をすべて記入すること．

3. 問題は６問あります．問題ごとにそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

4. 解答にあたっては,導出過程も示すこと．

5. 必要に応じて付表を参照すること．

6. 解答用紙の裏面を使用しても構いません．

7. 解答用紙上部の細長い四角の枠内に問題番号を記入すること．

8. 試験終了後，解答用紙と下書き用紙を別々に集めます．問題冊子は持ち帰ってください．

問題1 次の2次正方行列を考える．

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

このとき，以下の各問に答えよ．なお，$\mathbf{0}$ はゼロベクトル，${}^tA$ は行列 A の転置を表す．

(1) 行列 A の固有値をすべて求めよ．

(2) 行列 A のそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

(3) 行列 A による漸化式 $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$，$(n = 0, 1, 2, \cdots)$ を考える．また，初期ベクトルは $\mathbf{x}_0 = {}^t[0, 1]$ である．この漸化式を $n \to \infty$ としたとき，$\mathbf{x}_n$ が $A\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$ を満たすベクトル $\mathbf{x}^*(\neq \mathbf{0})$ に収束することを示せ．

(4) 行列 A のように，全ての成分が正かつ各列の成分の和が1となる，m 次正方行列 B を考える．このとき，$B\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^*$ を満たすベクトル $\mathbf{y}^*(\neq \mathbf{0})$ が存在することを示せ．

問題2 V を体 K 上有限次元ベクトル空間とする．線形写像 $L : V \to V$ に関する以下の各問に答えよ．

(1) L が単射であることの定義と全射であることの定義をそれぞれ述べよ．

(2) V は3次以下の実係数多項式の集合であるとする．単射でない線形写像 $L : V \to V$ の具体例を一つ挙げなさい．その際，挙げた L が単射でないことの説明を付すこと．

(3) L が単射であることと全射であることは同値となることを証明せよ．その際，次元定理は証明なしで利用してよい．

問題 3 以下の各問に答えよ．

(1) 次の累次積分を積分順序を変更することによって求めよ．

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 6y^2 e^{x^2} \mathrm{d}x$$

(2) 次の広義 2 重積分を求めよ．ただし，α は実数とする．

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$$

問題 4 以下の各問に答えよ．なお，$\mathbb{R}^2$ は 2 次元ユークリッド空間 (平面) を表している．

(1) $y = x^2$ のグラフ上の点のうち，点 $(x, y) = (16, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ からの距離が最小となる点をラグランジュの未定乗数法を用いて求めよ．なお，最短距離の存在は保証されている．

(2) (1) で求めた点を (a, b) とおく．点 $(16, \frac{1}{2})$ から点 (a, b) へのベクトルと，$y = x^2$ のグラフの接線との間に成立する幾何学的特徴を言葉で説明した上で図示せよ．

(3) (2) で挙げた特徴が確かに成り立っていることを計算で示せ．

問題 5 ある製品の個人普及率を無作為抽出で調べたところ，A 市では 600 人のうち 80 人が，B 市では 400 人のうち 80 人が所有していると回答した．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) A 市と B 市で個人普及率に差があると言えるか，有意水準 0.05 で検定せよ．計算過程で現れる小数については，小数第五位で四捨五入すること．

(2) 個人普及率の差の 95% 信頼区間を答えよ．解答の際には平方根を小数になおさずに答えてよい．

問題 6 $X_1, ..., X_n$ を区間 $[0, \theta]$ $(\theta > 0)$ の連続一様分布からの無作為標本とする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) X_i の確率密度関数 $f(x)$ を示した上で，期待値を求めよ．

(2) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とおく．$T_1 = c\bar{X}$ が θ の不偏推定量となるような定数 c を求めよ．

(3) $Y = \max(X_1, \ldots, X_n)$ とおく．Y の確率密度関数 $g(y)$ を求めよ．ただし，$\max(X_1, \ldots, X_n)$ は $X_1, \ldots, X_n$ の最大値を意味する．

(4) $T_2 = \alpha_n Y$ が θ の不偏推定量となるように α_n を定めよ．

付表 **1** 標準正規分布表： $Q(z) = \int_0^z \phi(t)dt$. 但し, $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986

付表 **2**

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$