

令和5年度応用理工学類編入学試験 学力検査問題

令和4年7月9日(土) 10:00~12:30

注意事項

- 1) この冊子には、数学1、数学2、物理学1、物理学2、化学1、化学2の計6題の問題がある。「物理学1、物理学2、化学1、化学2」の中から2題を選択し、数学1、数学2と合わせて計4題を解答すること。下記の表も参照すること。

問題	解答用紙の種類	解答用紙の枚数	備考
数学1	罫線あり	1枚	必須
数学2	罫線あり	1枚	
物理学1	罫線あり	1枚	} この中から 2題選択
物理学2	罫線あり	1枚	
化学1	罫線あり	1枚	
化学2	罫線あり	1枚	

- 2) 解答用紙の所定欄に学群、学類、氏名、及び受験番号を記入すること。
- 3) すべての解答用紙の氏名欄の下の1行の欄に解答する問題名、すなわち、「数学1」、「数学2」、「物理学1」、「物理学2」、「化学1」、「化学2」のいずれかを明記すること。必要なら、解答用紙の裏も解答に用いてよい。
- 4) 机の上には「受験票」、「鉛筆」、「消しゴム」、「鉛筆削り」、「時計(計時機能だけのもの)」、「眼鏡」以外のものを置かないこと。

数学1 試験問題

1. 以下の設問に答えよ。ここで i は虚数単位とする。

(1) マクローリン展開を用いてオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を示せ。ここで x は実数とする。

(2) $\alpha^m = e^{(-1-i\frac{\pi}{2})^m}$ について、 $\alpha^m = a_m + ib_m$ の形 (a_m, b_m は実数) で表すことを考える。

① $m = 1$, ② $m = 2$, ③ $m \geq 3$ の整数, のそれぞれの場合における a_m, b_m を求めよ。

(3) 積分 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \sin 4x dx$ (n は整数) の値を求めよ。

2. xy 平面にて, 媒介変数 θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を用いて, 曲線 C を $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$ と定義するとき, 以下の設問に答えよ。

(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$ の点における曲線 C の接線を求めよ。

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3) x 軸, y 軸, z 軸が右手系をなすように z 軸を導入して 3 次元直交座標系を考える。曲線 C を x 軸まわりに 1 回転させて得られる回転体の表面を S とする。このとき S 上の点は, θ と x 軸まわりの回転角 γ ($0 \leq \gamma \leq 2\pi$) を用いて

$$x = \theta - \sin \theta, \quad y = (1 - \cos \theta) \cos \gamma, \quad z = (1 - \cos \theta) \sin \gamma$$

と表せる。

表面 S 上の, $\theta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ の点における接平面の単位法線ベクトルを, x, y, z 各軸方向の基本ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を用いて表せ。

数学2 試験問題

行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ を求めよ。ただし、 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4$ とする。
- (2) A の正規直交化された4つの固有ベクトルを求めよ。ただし、すべての固有ベクトルの第1成分を0以上となるように求めよ。重解の固有値がある場合には、その固有値に対するすべての固有ベクトルは、第1成分に加えて、第2成分も0以上になるように求めよ。

- (3) A を $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ の形に対角化する直交行列 P 、およびその逆行列 P^{-1} を求めよ。

- (4) ベクトル $\mathbf{x}(t)$ が常微分方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}(t) = -A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

を満たす。 $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$ とおき、 $\mathbf{y}(t), \mathbf{x}(t)$ を求めよ。

物理学 1 試験問題

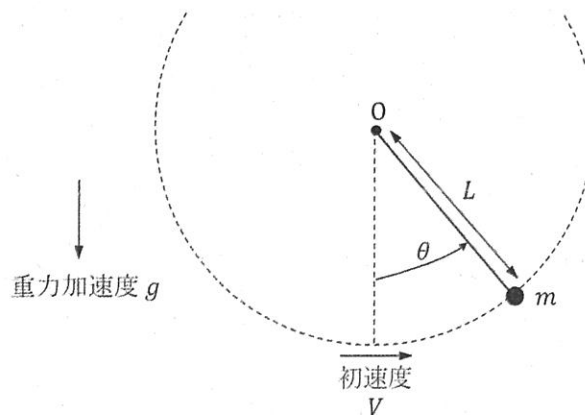
1. 図に示すように、質量を無視できる長さ L の棒の一端が点 O にあり、もう一端に質量 m の質点がある。棒は点 O 周りに滑らかに鉛直面内（紙面内）を回転できる。棒の回転角を θ 、時間を t 、重力加速度を g とする。棒と質点に作用する空気抵抗は無視する。

棒が $\theta = 0$ で静止しているときに、質点に大きさ V の初速度を水平方向に与える。

各問に解答する際には次より必要なものを用いること：

$$L, m, g, V, \theta, t, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- (1) 質点の速度と加速度の周方向（ θ 方向）成分をそれぞれ示せ。
- (2) 質点の周方向（ θ 方向）の運動方程式を示せ。
- (3) 質点の運動に関するエネルギー保存則を(2)で求めた運動方程式より導出せよ。
- (4) 初速度 $V = v_0$ を与えたところ、質点は振れ角が非常に小さい振り子運動をした。この運動の周期 T_0 を導出過程とともに示せ。
- (5) (4)で与えた初速度 $V = v_0$ よりも大きい初速度 $V = v_1$ を与えたところ、質点は振れ角の振幅 θ_1 が $\pi/3$ 、周期 T_1 の振り子運動をした。 T_0 と T_1 の大小関係を示し、その理由を説明せよ。



図

物理学 2 試験問題

原点 O を中心とした半径 a , b の導体球殻 A , B を考える ($a < b$, 図 1)。球殻の厚さは無視できるものとし、以下の問いに答えよ。

(1) A と B を絶縁しておき、電荷の自然な流入・消失はないとする。また、最初はどちらも電荷をもっていないとする。球内外の誘電率を ϵ_0 、無限遠での電位を 0 とする。

(a) 外側の B に一様に電荷 Q (> 0) を与えたとき、原点からの距離 r における動径方向の電場の成分 $E(r)$ と電位 $\phi(r)$ を $0 < r < a$, $a < r < b$, $b < r$ の各領域で求めよ。

(b) 次に、 A と B を導線をつないで電氣的に接続したところ、電荷の移動は観測されなかった。その理由を説明せよ。

(2) 次に、クーロン力の距離依存性が逆二乗則でない場合も考えるため、2つの電荷 q_1 , q_2 の間にはたらく力を $f(r_{12})q_1q_2$ と定義する。 r_{12} は 2つの電荷間の距離である。2つの電荷の間にはたらく力は両者を結ぶ直線の方を向き、 $q_1q_2 > 0$ のときは斥力、 $q_1q_2 < 0$ のときは引力とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(a) 電荷 Q (> 0) が一様に分布した球殻 B がある。図 2 のように、その内部の点 $P(0, 0, z_0)$ (直交座標, $0 < z_0 < b$) に点電荷 q (> 0) があるとする。 B 上の点を極座標で $P'(b, \theta, \phi)$ とし、 P と P' との距離を r としたとき、点電荷 q と球殻 B 上の点 P' のまわりの微小面積 $b^2 \sin\theta d\theta d\phi$ に含まれる電荷との間にはたらく力の z 成分を求めよ。ただし、 q は十分に小さく電荷 Q は球殻 B に一様に分布したままであるとする。

(b) 次に、球殻 B と点電荷 q との間にはたらく力の大きさが

$$F(z_0) = \frac{qQ}{4bz_0^2} \int_{b-z_0}^{b+z_0} f(r) (z_0^2 - b^2 + r^2) dr$$

となることを示せ。

(c) 次に、 $f(r) = C_3 r^{-3}$ のときの $F(z_0)$ を求めよ。また、逆二乗則 $f(r) = C_2 r^{-2}$ のときの $F(z_0)$ も求めよ。 C_2 , C_3 は正の比例定数である。

(次ページに続く)

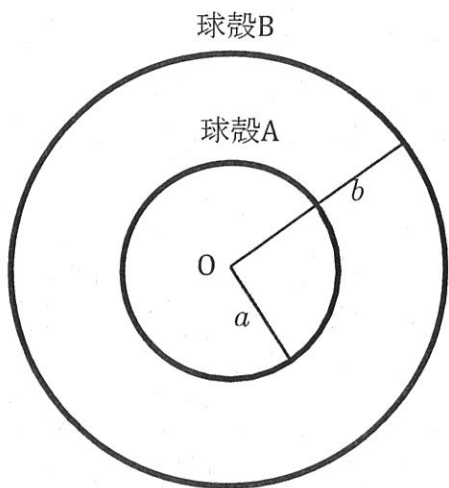


図 1

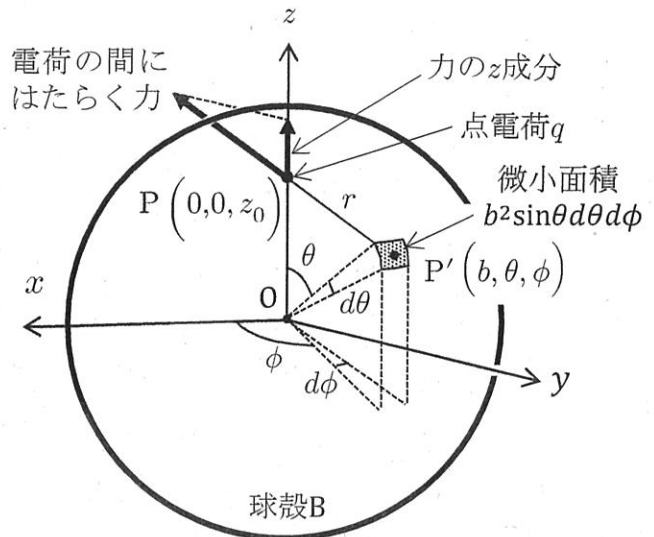


図 2

化学 1 試験問題

1. KClは塩化ナトリウム型の結晶構造をとる。以下の問いに答えよ。

- (1) K^+ と Cl^- それぞれの半径を a , b としたとき, KClの単位格子がとりうる最小の体積 V を a , b を用いて示せ。
- (2) 天然のKClには, KとClの同位体がそれぞれ複数含まれている。KClが取りうる最小の単位格子の体積が 250 \AA^3 であり, KとClの天然存在比が表1のように与えられるとき, 天然のKClの密度を有効数字2桁, 単位を g cm^{-3} として計算せよ。必要であれば, アボガドロ定数として 6.02×10^{23} を用いよ。

表1

同位体核種	同位体相対質量	天然存在比 (%)
^{35}Cl	35.0	76.0
^{37}Cl	37.0	24.0
^{39}K	39.0	93.0
^{41}K	41.0	7.00

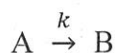
- (3) $K^+(\text{g})$ と $Cl^-(\text{g})$ から $KCl(\text{s})$ が生成する際の, 298 Kにおける標準エンタルピー変化 (ΔH°) を計算せよ。必要であれば, 298 Kにおける各ステップの ΔH° の値として表2の数値を用いよ。また, ボルン-ハーバーサイクルを計算に利用した数字がすべてわかるように図で表せ。

表2

ステップ	$\Delta H^\circ / (\text{kJ mol}^{-1})$
KCl(s)の生成	-440
K(s)の昇華	90
K(g)のイオン化	420
$\text{Cl}_2(\text{g})$ の解離	240
Cl(g)への電子付加	-350

(次ページに続く)

2. 分子Aから分子Bが生成する下記の反応は、一次の反応速度式に従って進む。
 k はその反応速度定数である。

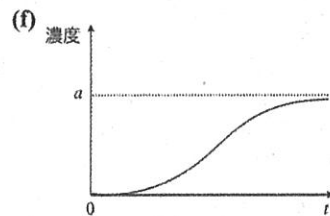
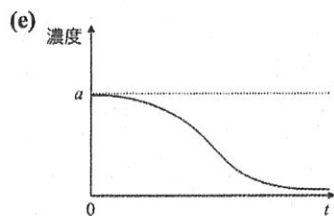
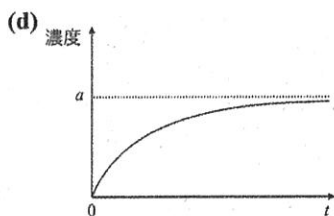
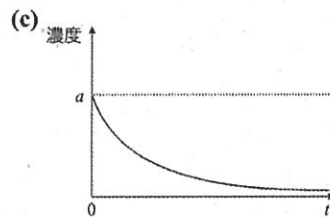
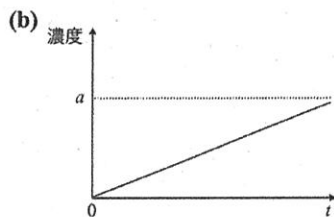
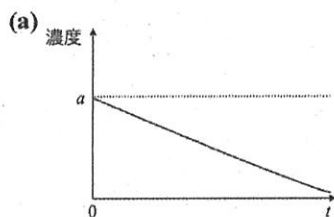


以下の問いに答えよ。

- (1) この反応の反応速度 v は、Aの濃度 $[A]$ 、反応速度定数 k の関数として以下のように表すことができる。 に入る数式を示せ。ただし、 t は時間を表す。

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = \text{ }$$

- (2) Aの初濃度を a としたとき、時間 t が増えるとともにAとBの濃度がどのように変化するか、AとBそれぞれについて、最も適切なグラフを次の(a)~(f)の中から選び、記号で答えよ。



- (3) 転化率 θ とは、反応開始時点でのAの量に対する、反応開始から時間 t の間に消費されたAの量の割合のことである。 θ を t と k を用いて示せ。
- (4) 反応開始後20.0分における θ は0.100であった。 θ が0.900となる時間を有効数字2桁で求めよ。ただし、必要であれば $\ln 9 = 2.20$ 、 $\ln 10 = 2.30$ を用いよ。

化学2 試験問題

1. 次の化合物の構造式を示せ。

(1) 3-メチル-2-ヘプタノン

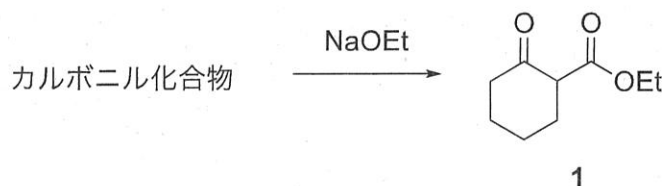
(2) (S)-4-クロロ-2-ペンチン

(3) (2E,4Z)-1-ブロモ-3-メチル-2,4-ヘキサジエン

2. ヒドロキシ安息香酸には、3種類の異性体 (*o*-, *m*-および*p*-) が存在する。このうち、*o*-ヒドロキシ安息香酸の酸性度が最も高い。その理由を説明せよ。必要であれば、構造式を用いて説明してもよい。

3. 1,4-ジメチルシクロヘキサンについて、可能ないす型配座すべての構造式を、立体化学がわかるように示せ。また、最も安定なものを丸で囲み、その理由を説明せよ。

4. 次に示す化合物**1**の合成反応について、以下の問いに答えよ



(1) 化合物**1**は、ジエステルの分子内反応で合成することができる。この反応を完結させるためには、塩基 (NaOEt) は触媒量ではなく、等モル量以上が必要である。その理由を説明せよ。

(2) 化合物**1**は、2種類のカルボニル化合物の分子間反応でも合成することができる。これら2種類のカルボニル化合物を構造式で示せ。

(次ページに続く)

5. 次の反応の主生成物**A**~**F**の構造式を示せ。必要ならば、立体化学が分かるように示せ。

