

令和5年度

理工学群物理学類 推薦入試

小論文 試験問題

注意事項

- ① 試験時間は90分です。
- ② 問題Ⅰ、Ⅱのすべてに解答せよ。
- ③ 解答用紙は各問題に対して1枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。
- ④ 解答を書ききれない場合は、「裏へ」と明記してその解答用紙の裏面に続けて書くこと。
- ⑤ 下書き用紙は採点しない。

問題 I

地球を半径 R の密度が一定の球とする。図1に示す地球の中心 O から距離 r の点 P に質量 m の物体があるとする。このとき、物体にはたらく地球の万有引力は、半径 r ($=OP$) の球面 S (破線で表す) の内部にある地球の質量が中心 O に集中しているものとしたときの引力に等しい。一方、点 P での万有引力に対する球面 S の外にある地球の質量の寄与は常に互いに打ち消し合ってゼロとなる。これは、点 P が地球の内部 ($r \leq R$) または外部 ($r > R$) のいずれにあっても成り立つ。万有引力によって生じる重力加速度の地表面 ($r = R$) での大きさを g として、以下の問いに答えよ。なお、地球の公転の影響は無視する。また、問7までは地球の自転の影響を無視することにする。

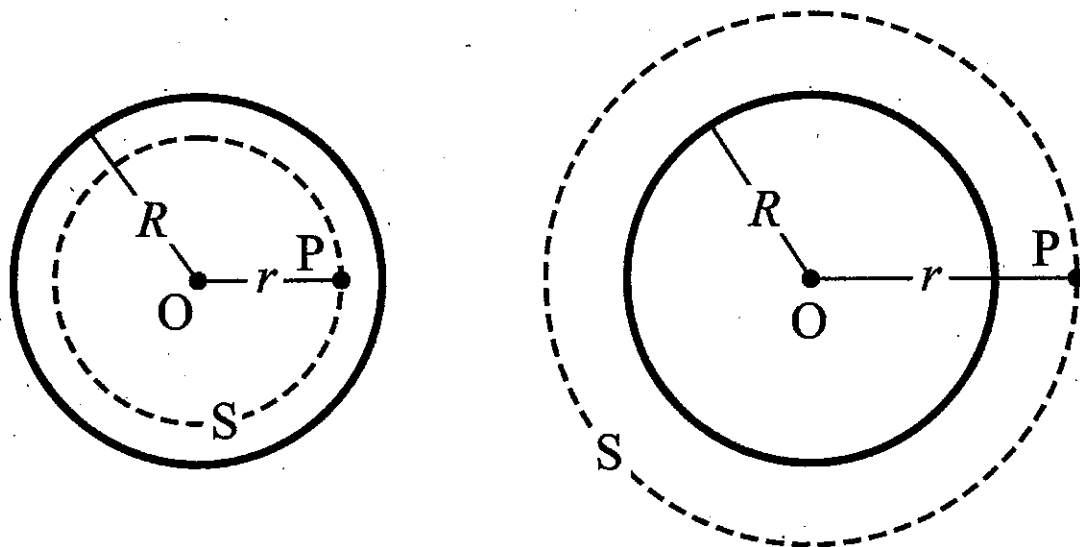


図1 (左: 点 P が地球の内部にある場合、右: 外部にある場合)

問1 点 P にある物体にはたらく万有引力の大きさ F は点 P が地球の内部 ($r \leq R$) にある時には $F = mgr/R$ となる。これを上の説明文の内容に基づいて示せ。

問2 点 P が地球の外部にある場合 ($r > R$) の F を求めよ。また、 $0 \leq r \leq 2R$ の範囲で F のグラフの概形を描け。

図2は中心 O と赤道を含む地球の断面を表す。赤道上の遠く離れた2つの都市 A と B を直線で結ぶトンネルを掘り、その中を地球の万有引力によって往復運動する列車を考える。この列車は万有引力以外の動力を持たず、また、摩擦や抵抗の影響を一切受けないものとする。地球の中心 O から AB に垂線 OC を下ろし、

Cを原点としてBからAへの向きを正とする x 軸を考える。列車の質量を m 、 $\angle AOB$ を 2φ 、円周率を π とする。なお、列車の大きさは無視してよい。

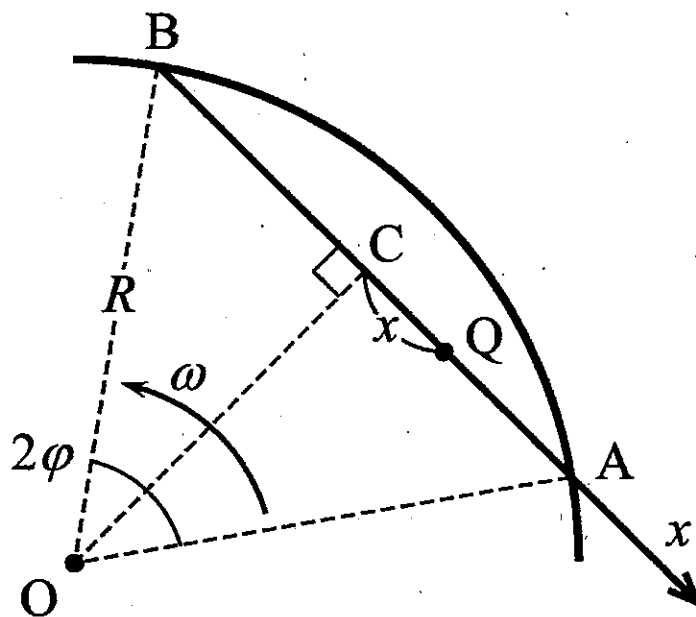


図2

問3 列車が座標 x の点Qにあるときに列車にはたらく万有引力の x 軸方向の成分を求めよ。

問4 列車が座標 x の点Qにあるときの列車の加速度を求めよ。

列車がAB間で行う往復運動は単振動である。AまたはBを出発するときの列車の初速度をゼロとする。

問5 点Cに到達したときの列車の運動エネルギーを求めよ。

問6 Bを出発した列車が最初に点Cに到達するまでに受ける力積の x 軸方向の成分を求めよ。

問7 往復運動の周期の半分であるAB間の所要時間を求めよ。

以下では、列車の運動に対する地球の自転の影響を考える。図2の点Oを通る紙面に垂直な軸を中心として、一定の角速度 ω で矢印の方向（反時計回り）に

地球が回転運動しているものとする。地球上において、地球が静止しているように見えている観測者の立場で、以下の問いに答えよ。

問 8 列車が座標 x の点Qにあるときに列車にはたらく遠心力の x 軸方向の成分を求めよ。

地球の自転が列車の運動に与える影響としては、遠心力のみを考えればよい。列車の受ける遠心力は万有引力よりも小さいとする。また、上述の地球上にいる観測者から見て、AまたはBを出発するときの列車の初速度は常にゼロとする。

問 9 列車が座標 x の点Qにあるときの列車の加速度を求めよ。

問 10 BからAへの所要時間を求めよ。

問 11 地球の自転によって、AB間の列車の運動はどのように変化するか。以下の5つの選択肢の中から正しいものを1つ選べ。

- (イ) 地球上にいる観測者から見ている限り、地球が自転していないとした場合と列車の運動は変わらない。
- (ロ) AB間の所要時間は往路・復路ともに等しく長くなる。
- (ハ) AB間の所要時間は往路・復路ともに等しく短くなる。
- (ニ) AB間の所要時間に往路と復路の間で差が生じる。
- (ホ) Aを出発した列車は途中で失速してBに到達しなくなる。

問題 II

図1は、荷電粒子（イオン）を加速することができるサイクロトロンと呼ばれる装置を上から見た概略図である。半円型で中空の金属電極 D_1 、 D_2 が真空中で向かい合わせに設置され、磁束密度 B の一様な磁場が紙面に垂直に裏から表の向きにかけられている。 D_1 と D_2 の間にはごく小さな隙間（ギャップ）がある。簡単のために、ギャップの磁場はないと仮定する。 D_1 と D_2 の間には交流電源が接続されている。ギャップに置かれたイオン発生器 S から生じた質量 m 、電荷 q のイオンを、 D_1 の境界に速さ v_0 で垂直に入射させる。イオンは D_1 中を円軌道を描いて半周したのちギャップに到達し、ギャップの電場により加速されて D_2 に入射する。イオンがギャップを通過する時間は十分に短く、イオンがギャップを通過する最中の D_1 と D_2 の電位差（ D_1 の電位と D_2 の電位の差の絶対値）を一定値 V と近似する。重力と電磁波の影響は無視できるものとして、以下の問いに答えよ。

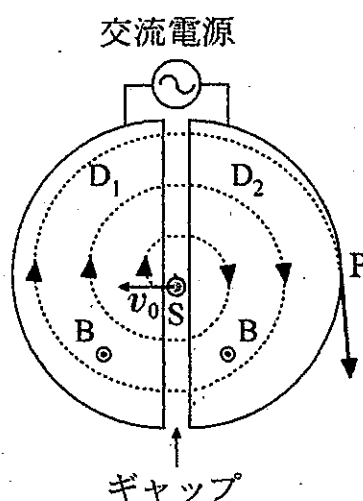


図1

- 問1. イオンは、 D_1 に最初に入射してから図1の点線のように紙面の上から見て時計回りの円軌道を描いた。この時のイオンの電荷 q の正負を示し、円軌道の半径 r を m 、 q 、 v_0 、 B のうち必要なものを用いて表せ。
- 問2. イオンが D_1 中を半周する時間 t を m 、 q 、 v_0 、 B のうち必要なものを用いて表せ。
- 問3. イオンが D_1 を出てギャップで加速し、初めて D_2 に入射した時のイオンの運動エネルギー K_0 を m 、 q 、 v_0 、 B 、 V のうち必要なものを用いて表せ。

- 問4. イオンは D_2 内で円運動をした後ギャップで再び加速し、その後は D_1 内、 D_2 内の円運動を交互に繰り返した。イオンはギャップで常に電位差 V で加速したとする。 D_2 を2回目に通過している時のイオンの速さを m 、 q 、 v_0 、 B 、 V のうち必要なものを用いて表せ。
- 問5. イオンはギャップを通過するたびに少しずつ加速し、十分な速さになったところで窓 P から取り出される。イオンが窓 P に達した時の円軌道の半径が R であった。この時のイオンの運動エネルギー K_1 を m 、 q 、 v_0 、 B 、 V 、 R のうち必要なものを用いて表せ。
- 問6. イオンがギャップを通過するごとに電位差 V で加速されるための交流電源の周波数 f の最小値を、 m 、 q 、 v_0 、 B 、 V 、 R のうち必要なものを用いて表せ。ただし、イオンがギャップを通過する時間は無視できるものとする。