令和5年度

試験名：学群編入学試験　　**【理工学群　工学システム学類】**

区　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 数学1	

1.

(1) $\cos x$ と $\sin x$ のマクローリン展開は

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

であるから，$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ を用いて

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \cos x + i \sin x$$

となる．

(2) ① $\alpha = e^{-1-i\frac{\pi}{2}} = e^{-1}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = -\frac{i}{e}$　よって　$a_1 = 0, b_1 = -e^{-1}$　--(答)

オイラーの公式より　$\alpha^m = e^{\left(-1-\frac{i\pi}{2}\right)m} = e^{-m}\left(\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)$ であるから

② $m=2$ のとき　$\alpha^2 = e^{-2}(\cos\pi - i\sin\pi) = -e^{-2}$ よって $a_2 = -e^{-2}, b_1 = 0$　--(答)

③ $m \geq 3$ のとき，　$\alpha^m = e^{-m}\left(\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)$ を用いて

$m = 4l + 3(l = 0,1,\ldots)$ のとき，$\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = -1$ より $a_m = 0, b_m = e^{-m}$.

$m = 4l\ (l = 1,2,\ldots)$ のとき，$\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$ より $a_m = e^{-m}, b_m = 0$.

$m = 4l + 1(l = 1,2,\ldots)$ のとき，$\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 1$ より $a_m = 0, b_m = -e^{-m}$

$m = 4l + 2\ (l = 1,2,\ldots)$ のとき，$\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$ より $a_m = -e^{-m}, b_m = 0$.

--(答)

※ $\alpha^m = e^{\left(-1-\frac{i\pi}{2}\right)m} = e^{-m}(-i)^m$ から，$m = 2l(l = 1,2,\ldots)$ のとき $a_m = (-1)^{\frac{m}{2}}e^{-m}, b_m = 0$,
$m = 2l + 1(l = 1,2,\ldots)$ のとき $a_m = 0, b_m = (-1)^{\frac{m+1}{2}}e^{-m}$，としてもよい．

(3) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\sin 4x\,dx$　(n は整数) において

<u>$n \neq \pm 4$ であるとき</u>　$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\sin 4x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 4x(\cos nx - i\sin nx)\,dx = 0$

<u>$n = +4$ であるとき</u>　$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i4x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i4x}\frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i}\,dx = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - e^{-i8x}\right)dx = \frac{1}{2i}$

<u>$n = -4$ であるとき</u>　$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i4x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i4x}\frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i}\,dx = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i8x} - 1\right)dx = -\frac{1}{2i}$

2．

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$　$\dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ より

接線の傾き $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\sqrt{3}$ ，また $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で $(x,y)=\left(\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \dfrac{1}{2}\right)$

よって接線は $y-\frac{1}{2}=\sqrt{3}\left(x-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ すなわち $y=\sqrt{3}\,x+2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ --(答)

(2) 面積 $A=\int_0^{2\pi}ydx$ について，$y=(1-\cos\theta)$ の置換積分，このとき $dx=(1-\cos\theta)d\theta$

$$A=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=3\pi \quad \text{--(答)}$$

(3) 表面 S は媒介変数を θ と γ として表すと

$x(\theta,\gamma)=\theta-\sin\theta$，$y(\theta,\gamma)=(1-\cos\theta)\cos\gamma$，$z(\theta,\gamma)=(1-\cos\theta)\sin\gamma$

となるので，接線ベクトルは，x, y, z 方向の基本ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ を用いて

$$\boldsymbol{r}_\theta=\frac{\partial x}{\partial\theta}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\boldsymbol{k}=(1-\cos\theta)\boldsymbol{i}+\sin\theta\cos\gamma\,\boldsymbol{j}+\sin\theta\sin\gamma\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_\gamma=\frac{\partial x}{\partial\gamma}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial\gamma}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial\gamma}\boldsymbol{k}=-(1-\cos\theta)\sin\gamma\,\boldsymbol{j}+(1-\cos\theta)\cos\gamma\,\boldsymbol{k}$$

と表される．$\theta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ を代入して，法線ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\gamma=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{j}+\frac{3}{4}\boldsymbol{k}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{j}+\frac{1}{4}\boldsymbol{k}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{i}-\frac{1}{8}\boldsymbol{j}-\frac{\sqrt{3}}{8}\boldsymbol{k}$$

となるので，単位法線ベクトルは $|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\gamma|=\dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{j}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{k}$　(答)

※ 方向は逆でもよい

区　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 数学2	see below

（1）固有方程式$|\lambda E-A|=0$を解く。Eは単位行列である。

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

基本変形
1行に−(3行)
3列に＋(1列)

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -(\lambda-2) & 0\\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 0 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\{(\lambda-2)^3-2(\lambda-2)-2(\lambda-2)\}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-4)\lambda=0$$

よって，$\lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=2, \lambda_4=4$

（2）$(A-\lambda E)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$より固有ベクトル$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}$を求める。

$\lambda=0$のとき，

$$\begin{cases}2u_1-u_2 \qquad -u_4=0 & (1)\\ -u_1+2u_2-u_3 \qquad =0 & (2)\\ \qquad -u_2+2u_3-u_4=0 & (3)\\ -u_1 \qquad -u_3+2u_4=0 & (4)\end{cases}$$

(1)より$u_4=2u_1-u_2$　(5)
(2)より$u_3=-u_1+2u_2$　(6)
(5)(6)を(3)に代入して
$u_2=u_1$　(7)

(7)を(5)(6)に代入して
$u_4=u_1, u_3=u_1$
これは(4)も満たす。

よって，第1成分を0以上になるように正規化した固有ベクトルは，$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
	(see below)

$\lambda=2$（重解）のとき，

$$\begin{cases} -u_2 - u_4 = 0 \\ -u_1 - u_3 = 0 \\ -u_2 - u_4 = 0 \\ -u_1 - u_3 = 0 \end{cases}$$ より $\begin{cases} u_1 = -u_3 \\ u_2 = -u_4 \end{cases}$ よって，第1，2成分を0以上になる

ように正規直交化した固有ベクトルは，$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda=4$のとき，

$$\begin{cases} -2u_1 - u_2 - u_4 = 0 \\ -u_1 - 2u_2 - u_3 = 0 \\ -u_2 - 2u_3 - u_4 = 0 \\ -u_1 - u_3 - 2u_4 = 0 \end{cases}$$ これは，$\begin{cases} u_1 \to -u_1 \\ u_3 \to -u_3 \end{cases}$ とすると(1)(2)(3)(4)と同じ式。

第1成分を0以上になるように正規化した固有ベクトルは，$\boldsymbol{u}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

このとき、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4$ は互いに直交する。

（3）$A\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$ より

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = {}^{t}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

このとき，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

区　分	標準的な解答例又は出題意図
	（4） $\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t)=-A\boldsymbol{x}(t)$ に $\boldsymbol{x}(t)=P\boldsymbol{y}(t)$ を代入して整理すると

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t)=-(P^{-1}AP)\boldsymbol{y}(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t)=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\boldsymbol{y}(t) \text{ を解くと，}\quad \boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}a_1+b_1t\\a_2\cos(\sqrt{2}t)+b_2\sin(\sqrt{2}t)\\a_3\cos(\sqrt{2}t)+b_3\sin(\sqrt{2}t)\\a_4\cos(2t)+b_4\sin(2t)\end{pmatrix}$$

a_n, b_n（$n=1,2,3,4$）は定数。

$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\-2\end{pmatrix} \text{ より } \boldsymbol{y}(0)=P^{-1}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(0)=\frac{d}{dt}P^{-1}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}$$

を用いると， $\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\sin(2t)\end{pmatrix}$ 　よって， $\boldsymbol{x}(t)=P\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}\sin(2t)\\-\sin(2t)\\\sin(2t)\\-\sin(2t)\end{pmatrix}$

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
別解	

(別解)

（1）

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\{(\lambda-2)^3 - 2(\lambda-2)\} - (\lambda-2)^2 - (\lambda-2)^2 = (\lambda-2)^2(\lambda-4)\lambda = 0$$

よって，$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 4$

（2）

$\lambda = 0$のとき，

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1行\times 1/2 \\ 2行+1行\times 1/2 \\ 3行 \\ 4行+1行\times 1/2 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1行+2行\times 1/3 \\ 2行\times 2/3 \\ 3行+2行\times 2/3 \\ 4行+2行\times 1/3 \end{array} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 4/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -4/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1行+3行\times 1/4 \\ 2行+3行\times 1/2 \\ 3行\times 3/4 \\ 4行+3行 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

よって，第１成分を０以上になるように正規化した固有ベクトルは，$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$（重解）のとき，

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -2行 \\ -1行 \\ 3行-1行 \\ 4行-2行 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

区　分	標準的な解答例又は出題意図

よって，第１，２成分を０以上になるように正規直交化した固有ベクトルは，

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{u}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$\lambda=4$のとき，

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-2&-1&0&-1\\-1&-2&-1&0\\0&-1&-2&-1\\-1&0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{array}{c}1\text{行}\times(-1/2)\\2\text{行}+1\text{行}\times(-1/2)\\3\text{行}\\4\text{行}+1\text{行}\times(-1/2)\end{array}\to\begin{pmatrix}1&1/2&0&1/2\\0&-3/2&-1&1/2\\0&-1&-2&-1\\0&1/2&-1&-3/2\end{pmatrix}\begin{array}{c}1\text{行}+2\text{行}\times1/3\\2\text{行}\times(-2/3)\\3\text{行}+2\text{行}\times(-2/3)\\4\text{行}+2\text{行}\times1/3\end{array}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1/3&2/3\\0&1&2/3&-1/3\\0&0&-4/3&-4/3\\0&0&-4/3&-4/3\end{pmatrix}\begin{array}{c}1\text{行}+3\text{行}\times(-1/4)\\2\text{行}+3\text{行}\times1/2\\3\text{行}\times(-3/4)\\4\text{行}-3\text{行}\end{array}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

よって，第１成分を０以上になるように正規化した固有ベクトルは$\boldsymbol{u}_4=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

このとき、$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4$は互いに直交する。

補足

補足：

(2)　$\boldsymbol{u}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$　も可。

(3)　$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，　$P^{-1}={}^tP=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ も可。

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 物理学1	(1) 速度の周方向成分　$L\frac{d\theta}{dt}$　　加速度の周方向成分　$L\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (2) 運動方程式は　$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$ (3) 運動方程式の両辺に$\frac{d\theta}{dt}$を乗じて積分し，初期条件を考慮すると $$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mV^2$$ (4) $\theta \ll 1$ のとき, $\sin\theta \cong \theta$と近似できる。このとき運動方程式は $$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$ となる。この一般解は $$\theta = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + B\right)$$ であるから， $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$ (5)　$T_1 > T_0$ θが微小でないとき，　運動方程式は$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$であるが，復元力の大きさは$\|-mg\sin\theta\|$である。これは$\sin\theta \cong \theta$と近似した場合の復元力の大きさ$\|-mg\theta\|$に比べて小さくなる。このため，運動の周期$T_1$は，$T_0$に比べて大きくなる。

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 物理学2	

問(1)

(a) 原点を中心とする半径rの球面にガウスの法則を適用することで以下を得る。

$b<r$ (球殻Ｂの外側) において，$E(r)=Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$.

$a<r<b$ (球殻ＡとＢの間) において，$E(r)=0$.

$0<r<a$ (球殻Ａの内側) において，$E(r)=0$.

球殻 Ｂ の外側での電場は，原点にある点電荷Qが作る電場と同じであるため，電位も原点にある点電荷Qが作る電位と同様である。また，球殻 Ｂ の内側には電場が存在しないため，電位は一定となる。すなわち，

$b<r$ (球殻Ｂの外側) において，$\phi(r)=Q/4\pi\varepsilon_0 r$.

$a<r<b$ (球殻ＡとＢの間) において，$\phi(r)=Q/4\pi\varepsilon_0 b$.

$0<r<a$ (球殻Ａの内側) において，$\phi(r)=Q/4\pi\varepsilon_0 b$.

(b) 球殻の内部では電場がなく，等電位になっているため球殻 Ｂ の電荷が Ａ に移動することはない。

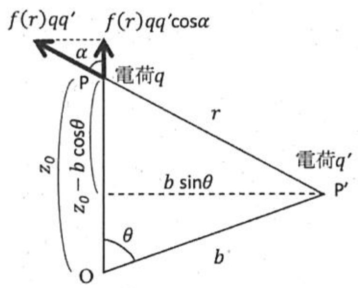
問(2)

(a) 微小面積の電荷をq'，参考図１のように角度αを定義すると，求める力のz成分f_zは，

$$f_z=f(r)qq'\cos\alpha=f(r)q\frac{Q}{4\pi b^2}b^2\sin\theta d\theta d\phi\times\frac{z_0-b\cos\theta}{r}=\frac{qQ}{4\pi}f(r)\frac{z_0-b\cos\theta}{r}\sin\theta d\theta d\phi$$

となる。

(b) 求める力$F(z_0)$は，θを0からπ、ϕを0から2πの範囲でf_zを積分すれば求められる。球対称な系であるため，x,y方向の力は相殺されるためz成分だけ計算すればよい。



参考図１

$$F(z_0)=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{qQ}{4\pi}f(r)\frac{z_0-b\cos\theta}{r}\sin\theta d\theta d\phi$$

$$=\frac{qQ}{2}\int_0^{\pi}f(r)\frac{z_0-b\cos\theta}{r}\sin\theta d\theta$$

ここで，

$r^2=(z_0-b\cos\theta)^2+(b\sin\theta)^2={z_0}^2+b^2-2bz_0\times\cos\theta$ より

$$b\cos\theta=\frac{{z_0}^2+b^2-r^2}{2z_0}$$

区　分	標準的な解答例又は出題意図
	(see below)

$$\sin\theta d\theta = \frac{r}{bz_0}dr$$

であることを用いてθの積分をrの積分に書き換え,

$$F(z_0) = \frac{qQ}{2}\int_{b-z_0}^{b+z_0} f(r)\frac{z_0 - \frac{z_0{}^2 + b^2 - r^2}{2z_0}}{r}\frac{r}{bz_0}dr$$

$$= \frac{qQ}{2}\int_{b-z_0}^{b+z_0} f(r)\frac{\frac{z_0{}^2 - b^2 + r^2}{2z_0}}{r}\frac{r}{bz_0}dr$$

$$= \frac{qQ}{4bz_0{}^2}\int_{b-z_0}^{b+z_0} f(r)(z_0{}^2 - b^2 + r^2)dr.$$

(c) $f(r) = C_3r^{-3}$で$F(z_0)$を計算する。

$$F(z_0) = \frac{qQ}{4bz_0{}^2}C_3\int_{b-z_0}^{b+z_0}\left(\frac{z_0{}^2 - b^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)dr$$

$$= C_3\frac{qQ}{4bz_0{}^2}\left[\frac{(b-z_0)(b+z_0)}{2r^2} + \ln(r)\right]_{b-z_0}^{b+z_0}$$

$$= C_3\frac{qQ}{4bz_0{}^2}\left[\frac{(b+z_0)(b-z_0)}{2(b+z_0)^2} - \frac{(b+z_0)(b-z_0)}{2(b-z_0)^2} + \ln\frac{b+z_0}{b-z_0}\right]$$

$$= C_3\frac{qQ}{4bz_0{}^2}\left(\frac{b-z_0}{2(b+z_0)} - \frac{b+z_0}{2(b-z_0)} + \ln\frac{b+z_0}{b-z_0}\right)$$

$$= C_3\frac{qQ}{4bz_0{}^2}\left(\frac{-2bz_0}{b^2 - z_0{}^2} + \ln\frac{b+z_0}{b-z_0}\right)$$

$f(r) = C_2r^{-2}$で$F(z_0)$を計算すると、z_0に依らずゼロになる。

$$F(z_0) = \frac{qQ}{4bz_0{}^2}C_2\int_{b-z_0}^{b+z_0}\left(\frac{z_0{}^2 - b^2}{r^2} + 1\right)dr$$

$$= C_2\frac{qQ}{4bz_0{}^2}\left[\frac{(b-z_0)(b+z_0)}{r} + r\right]_{b-z_0}^{b+z_0}$$

$$= C_2\frac{qQ}{4bz_0{}^2}\big((b-z_0) - (b+z_0) + (b+z_0) - (b-z_0)\big)$$

$$= 0$$