令和５年度

理工学群数学類
私費外国人留学生入試

小　論　文
試　験　問　題

注意事項

① 問Ｉ～問 III は別々の解答用紙に日本語で解答すること。

② 試験時間は９０分です。

問題 I　$f(x) = \sqrt{1-x^2}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$ とおく．1 以上の整数 n に対して

$$f_n(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right) \quad (0 \leqq x \leqq n)$$

とおく．x 軸, y 軸および $y = f_n(x)$ のグラフで囲まれた領域内に含まれる格子点の個数を a_n とする．ただし, 格子点とは x 座標と y 座標が共に整数であるような xy 平面上の点のことである．また, 領域の境界上の点も数えることにする．

(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ．

(2) 1 以上の整数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_n(k) \leqq a_n \leqq \sum_{k=0}^{n}(f_n(k)+1)$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$ を求めよ．

問題 II

(1) 二項定理 $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^r y^{n-r}$　$(n = 1, 2, \cdots)$ を示せ．ただし,
${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ である．

(2) n を 2 以上の整数とし, k を 1 以上 $n-1$ 以下の整数とする．以下の等式を示せ．

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r {}_{n-r}\mathrm{C}_{k-r} \times {}_n\mathrm{C}_r = 0$$

(3) $n = 2023$ のとき, ${}_n\mathrm{C}_{r-1}, {}_n\mathrm{C}_r, {}_n\mathrm{C}_{r+1}$ がこの順で等差数列になる 1 以上 $n-1$ 以下の整数 r をすべて求めよ．

(4) p を 0 以上の整数とし, $n = 2^p$ とおく．また, q を 0 以上 p 以下の整数とし, $r = 2^q$ とおく．2^s が ${}_n\mathrm{C}_r$ の約数となる最大の整数 s を求めよ．

問題 III　$a > 0$ とする．xy 平面上に曲線 $C : y = \dfrac{ae^x + e^{-x}}{2}$　$\left(x > -\dfrac{\log a}{2}\right)$ と, その上の点 $\mathrm{P}\left(t, \dfrac{ae^t + e^{-t}}{2}\right)$ がある．P における C の接線と x 軸との交点を Q とし, P における C の法線と x 軸との交点を R とする．また, 三角形 PQR の面積を S とする．

(1) S を t と a で表せ．

(2) P を C 上で動かしたところ, P における C の接線の傾きが $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ のときに S の値が最小になった．このとき a の値を求めよ．