令和５年度学群編入学試験

理工学群数学類

学　力　検　査
（専門科目）
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅲの全問題について解答すること。
② 解答用紙は各問題に対して１枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。
③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。
④ 下書き用紙は採点しない。
⑤ 試験時間は 120 分です。

問題 I

$$V = \{ f \mid f \text{ は } \mathbb{R} \text{ 上無限回微分可能な実数値関数} \}$$

とする．V の元 f, g の和 $f+g$，および実数 α に関するスカラー倍 αf を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

で定めることにより V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなす．写像 $F : V \to V$ を $F(f) = f''' - 7f'' + 16f' - 12f$ により定める．また，V の元 f_1, f_2, f_3 を $f_1(x) = e^{2x}, f_2(x) = xe^{2x}, f_3(x) = e^{3x}$ により定める．

(1) F は線形写像であることを示せ．

(2) f_1, f_2, f_3 は F の核 $\operatorname{Ker} F$ に含まれることを示せ．

(3) f_1, f_2, f_3 は一次独立であることを示せ．

(4) 写像 $G : \operatorname{Ker} F \to \mathbb{R}^3$ を

$$G(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \end{pmatrix}$$

により定める．G は全射な線形写像であることを示せ．

問題 II　以下の問いに答えよ．

(1) α を実数とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\frac{\log\left(\displaystyle\int_1^R x^{-\alpha}\,dx\right)}{\log R}$ を求めよ．

(2) 実数値関数 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上 3 回微分可能であり，$f'''(x)$ は $\mathbb{R}$ 上連続であるとする．$t\in\mathbb{R}$ に対して

$$g(t)=\int_{-t}^{t}f(x)\,dx-\frac{t}{3}\{f(t)+f(-t)+4f(0)\}$$

と定めるとき，

$$g(t)=\frac{1}{2}\int_0^t g'''(x)(t-x)^2\,dx$$

であることを示せ．

(3) $p(x,y)=2x^2+6xy+5y^2$ とする．正の実数 R に対して，

$$D_R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid p(x,y)\le R, y\ge 0, y\ge -x\}$$

と定める．このとき，重積分

$$\iint_{D_R}e^{-p(x,y)}\,dxdy$$

を求めよ．

問題 III　集合 Z のベキ集合を $\mathcal{P}(Z)$ で表す．$f:X\to Y$ を写像とし，$\varphi:\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(Y)$ を $\varphi(A,B)=(f^{-1}(B),f(A))$ で定める．φ を n 回合成した写像を $\varphi^{(n)}$ で表す．また $\pi:\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X\times Y)$ を $\pi(A,B)=A\times B$ で定める．次の命題に対して，正しいものには証明を与え，正しくないものには反例を与えよ．ただし，集合族 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, $\displaystyle\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$ である．

(1) φ が全単射であることは，$\varphi\circ\varphi$ が恒等写像であるための必要条件である．

(2) φ が全単射であることは，$\varphi\circ\varphi$ が恒等写像であるための十分条件である．

(3) $f(A)\subset B$ のとき，$\displaystyle\limsup_{n\to\infty}(\pi\circ\varphi^{(n)})(A,B)=f^{-1}(B)\times f(f^{-1}(B))$ である．

(4) $f(A)\subset B$ のとき，$\displaystyle\liminf_{n\to\infty}(\pi\circ\varphi^{(n)})(A,B)=f^{-1}(f(A))\times f(A)$ である．