

令和5年度

試験名:私費外国人留学生入試

【理工学群 工学システム学類】

区 分	標準的な解答例又は出題意図				
小論文 問題 1	<p>(1)</p> $\int_0^{\log 7} \frac{e^x}{2+e^x} dx = \int_0^{\log 7} \frac{(2+e^x)'}{2+e^x} dx = [\log(2+e^x)]_0^{\log 7}$ $= \log(2+e^{\log 7}) - \log(2+e^0) = \log 9 - \log 3 = 2\log 3 - \log 3 = \log 3$ <p>(2)</p> $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 3 \cos x)^3 dx$ $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + 9 \sin^2 x \cos x + 27 \sin x \cos^2 x + 27 \cos^3 x) dx$ <p>ここで、$\sin^3 x, \sin x \cos^2 x$ は奇関数、$\sin^2 x \cos x, \cos^3 x$ は偶関数より</p> $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 3 \cos x)^3 dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (9 \sin^2 x \cos x + 27 \cos^3 x) dx$ $= 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x \cos x + 3 \cos^3 x) dx = 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + 3 \cos^2 x) \cos x dx$ $= 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + 3(1 - \sin^2 x)) \cos x dx = 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\sin^2 x) \cos x dx$ $= 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 2\sin^2 x)(\sin x)' dx = 18 \left[3\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 18 \left(3 - \frac{2}{3} \right) = 42$ <p>(3)</p> $x = \sqrt{a} \tan \theta \text{ とおくと } dx = \frac{\sqrt{a}}{\cos^2 \theta} d\theta$ <table border="1" data-bbox="470 1485 839 1583"> <tr> <td>x</td> <td>$0 \rightarrow \sqrt{a}$</td> </tr> <tr> <td>θ</td> <td>$0 \rightarrow \pi/4$</td> </tr> </table> $\int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}} dx = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{(x^2+a)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}(\tan^2 \theta + 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\cos^2 \theta} d\theta$ $= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta = \frac{1}{a} [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2a}$	x	$0 \rightarrow \sqrt{a}$	θ	$0 \rightarrow \pi/4$
x	$0 \rightarrow \sqrt{a}$				
θ	$0 \rightarrow \pi/4$				

問題 2

(1)

2点からの距離の和が一定の点が描く軌跡はだ円となる。 x 軸と y 軸との交点を、それぞれ $(\pm x_1, 0)$ と $(0, \pm y_1)$, $(x_1, y_1 \geq 0)$ とすると,

$$2(a + x_1) = 2 \quad \text{より} \quad x_1 = 1 - a$$

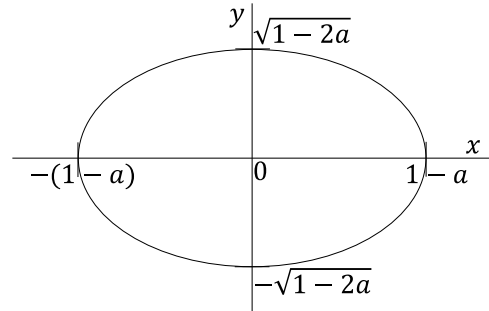
$$2\sqrt{a^2 + y_1^2} + 2a = 2 \quad \text{より} \quad y_1 = \sqrt{1 - 2a}$$

よって、図形の概形は右の通り

となり、面積 S_1 は、

$$\pi(1 - a)\sqrt{1 - 2a}$$

となる。



(2)

$$S_1(0) = \pi, \quad S_1(1/2) = 0$$

$$S'_1 = -\pi \frac{2 - 3a}{\sqrt{1 - 2a}} \quad \text{より, } 0 < a < 1/2 \text{ の区間において, } S_1 \text{ は単調減少である。}$$

従って、 S_1 が取り得る範囲は、 $0 < S_1 < \pi$ となる。

(3)

点 A が x 軸上にある時を除いて、点 A が線分 AB, BC, CA が囲む領域は三角形となる。点 A の座標を $(\pm x_2, \pm y_2)$, $(x_2, y_2 \geq 0)$ とすると,

$$\text{面積 } S_2 \text{ は, } \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot y_2 = ay_2 \quad \text{となる。}$$

よって、任意の a について S_2 が最大となるときの点 A の座標は $(0, \pm\sqrt{1 - 2a})$, S_2 は $S_2(a) = a\sqrt{1 - 2a}$ である。増減表は次の通りとなり、 S_2 が最大となるのは、

$$a = \frac{1}{3}, \quad \text{点 A の座標が } \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{のときである。}$$

(4)

点 A の座標を $(\pm x_3, \pm y_3)$, $(x_3, y_3 \geq 0)$ とすると,

$$\text{回転体の体積 } V \text{ は, } \quad V = \frac{2}{3} \pi a y_3^2 \quad \text{となる。}$$

よって、任意の a について V が最大となるときの点 A の座標は $(0, \pm\sqrt{1 - 2a})$ である。

$$V = -\frac{4}{3} \pi \left(a^2 - \frac{1}{2}a\right) \quad V' = -\frac{4}{3} \pi \left(2a - \frac{1}{2}\right) \quad \text{より}$$

増減表は次の通りとなり、 V が最大となるのは、

$$a = \frac{1}{4}, \quad \text{点 A の座標が } \left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{のときである。}$$

問題 3

- (1) 点 P における U を, m, g, R, θ を用いて表せ。

図より、点 P における高さ $h = R - R\cos\theta$

$$\therefore U = mgh = mgR(1 - \cos\theta)$$

- (2) v を v_0, R, g, θ を用いて表せ。

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos\theta)}$$

- (3) N を m, v_0, R, g, θ を用いて表せ。

動径方向の運動方程式は

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg\cos\theta$$

$$\therefore N = m\frac{v^2}{R} + mg\cos\theta$$

$$= m\frac{v_0^2 - 2gR(1 - \cos\theta)}{R} + mg\cos\theta$$

$$= m\frac{v_0^2}{R} - 2mg(1 - \cos\theta) + mg\cos\theta$$

$$= m\frac{v_0^2}{R} + mg(3\cos\theta - 2)$$

- (4) v_0 の最小値を求めよ

レールから離れることなく点 B まで到達するためには、B において $N(\theta = \pi) \geq 0$ となる必要がある。

$$N(\theta = \pi) = m\frac{v_0^2}{R} + mg(3\cos\pi - 2)$$

$$= m\frac{v_0^2}{R} + mg(-3 - 2)$$

問題 3 (つづき)

$$= m \frac{v_0^2}{R} - 5mg \geq 0$$

$$\therefore v_0^2 \geq 5gR$$

$$\therefore v_0 \geq \sqrt{5gR}$$

よって、求める最小値は

$$v_0 = \sqrt{5gR}$$

(5) GA 間の距離の最小値を求めよ。

まず、GA 間の距離 L を求める。

最上点 B における速度 v_B は、

$$v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos\pi)} = \sqrt{v_0^2 - 4gR}$$

B から G まで到達するのにかかる時間 t は

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 2R}{g}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$$

よって、

$$L = v_B \times t = \sqrt{v_0^2 - 4gR} \times 2\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\sqrt{\frac{R(v_0^2 - 4gR)}{g}}$$

ここで、 $v_0^2 \geq 5gR$ だから

$$L = 2\sqrt{\frac{R(v_0^2 - 4gR)}{g}} \geq 2\sqrt{\frac{R(5gR - 4gR)}{g}} = 2\sqrt{\frac{g(R \times R)}{g}} = 2R$$

$$\therefore L \geq 2R$$

よって、求める最小値は

$$L = 2R$$

(6) v_0 を求めよ。

$\theta = 120^\circ$ でレールから離れるとき、 $N(\theta = 120^\circ) = 0$ となる。

$$N(\theta = 120^\circ) = m \frac{v_0^2}{R} + mg(3\cos(120^\circ) - 2)$$

$$= m \frac{v_0^2}{R} + mg \left(3 \left(-\frac{1}{2} \right) - 2 \right)$$

$$= m \frac{v_0^2}{R} - \frac{7}{2} mg = 0$$

$$\therefore v_0^2 = \frac{7}{2} gR$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{7}{2} gR}$$

問題 3 (つづき)

(7) GA 間の距離を求めよ。

$$\begin{aligned} \theta = 120^\circ \text{ のとき小球の速さ } v' \text{ は} \\ v' &= \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos 120^\circ)} \\ &= \sqrt{\frac{7}{2}gR - 2gR \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right)} \\ &= \sqrt{\frac{7}{2}gR - 3gR} \\ &= \sqrt{\frac{gR}{2}} \end{aligned}$$

さて、レールから離れる点を原点とし、左方向および上方向を x 軸および y 軸の正とする座標を考える。小球がレールから離れる時の速度ベクトルの x 成分 v_x と y 成分 v_y は、図 1 を参考にすると、それぞれ

$$\begin{aligned} v_x &= v' \cdot (-\cos 120^\circ) = \sqrt{\frac{gR}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gR}{2}} \\ v_y &= v' \cdot \sin 120^\circ = \sqrt{\frac{gR}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3gR}{2}} \end{aligned}$$

である。

小球がレールから離れ最初に床に到達するまでかかる時間を t' とすると、到達地点の小球の座標は、

$$\begin{aligned} x &= v_x \times t' \\ y &= -(R - R \cos 120^\circ) = -\frac{3R}{2} \end{aligned}$$

さて、 y 方向に対し小球は放物運動を行うので、

$$\begin{aligned} y &= v_y t' - \frac{1}{2} g t'^2 \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3gR}{2}} t' - \frac{1}{2} g t'^2 \\ &= -\frac{3R}{2} \\ \therefore \frac{1}{2} g t'^2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3gR}{2}} t' - \frac{3R}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore g t'^2 - \sqrt{\frac{3gR}{2}} t' - 3R = 0$$

二次方程式の解の公式より

$$\begin{aligned} t' &= \frac{\sqrt{\frac{3gR}{2}} + \sqrt{\frac{3gR}{2} - 4g(-3R)}}{2g} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{27}{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{6R}{g}}$$

よって、

$$x = v_x \times t' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gR}{2}} \cdot \sqrt{\frac{6R}{g}} = \frac{\sqrt{3}}{2} R$$

以上より、到達地点の座標は $(\frac{\sqrt{3}}{2} R, -\frac{3}{2} R)$ であるが、これは点 A の座標である。よって、求める GA 間の距離は 0 である。