令和5年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 化学1	1.では結晶の構造，原子量，エンタルピーについて基礎的な知識および計算力を問う。2.では化学反応論における基礎的な知識および計算力を問うとともにその知識を転化率へ応用する論理的な思考力を問う。

1.

(1)　$V = (2a + 2b)^3$

(2)　$\rho = (39.0 \times 0.930 + 41.0 \times 0.0700 + 35.0 \times 0.760 + 37.0 \times 0.240) \times 4 / (6.02 \times 10^{23} \times 250 \times 10^{-24})$

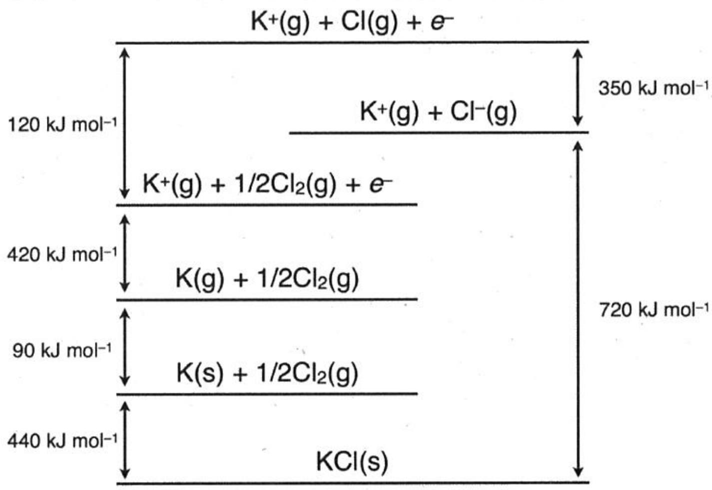
$= 1.983$

$= 2.0\ \mathrm{g\ cm^{-3}}$

(3)　$440 + 90 + 420 + 240/2 - 350 = 720$

よって $-720\ \mathrm{kJ\ mol^{-1}}$

ボルン－ハーバーサイクルは以下の通り



令和5年度

試験名：学群編入学試験　　　　【理工学群　応用理工学類】

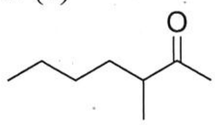
区　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 化学1	2. (1)　k[A] (2) A: (c) B: (d) (3)　$\theta = 1 - \exp(-kt)$ (4) $0.100 = 1 - \exp(-k \times 20)$ $0.900 = 1 - \exp(-kt)$ 移項して $\exp(-20k) = 0.9$ $\exp(-tk) = 0.1$ 両辺に ln をとると $-20k = \ln 0.9 = \ln 9 - \ln 10$ $-tk = \ln 0.1 = \ln 1 - \ln 10 = -\ln 10$ よって $t = 20 \times (\ln 10)/(\ln 10 - \ln 9)$ $= 4.6 \times 10^2$ 分

令和5年度

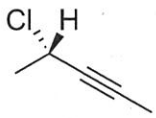
試験名：学群編入学試験　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 化学2	さまざまな有機化合物を題材にして，分子の構造，性質や反応性，有機化学反応に関する基本的事項の理解について問う。

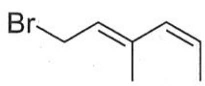
1. (1)



(2)

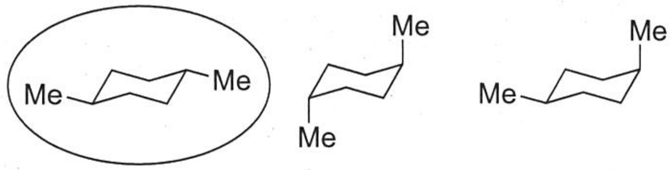


(3)



2.
理由：*o*-ヒドロキシ安息香酸のみ，ヒドロキシ基とカルボキシル基で分子内水素結合を形成することにより、他の異性体と比べて共役塩基が安定化するから。

3.
配座：



アキシアル位にメチル基がないため，他の構造と比べて 1,3-ジアキシアル相互作用による不安定化がないから。

令和5年度

試験名:学群編入学試験　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図

解答例

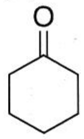
化学2

4.

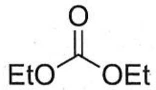
(1)

生成物の2つのカルボニル基に挟まれたα水素が，原料のα水素よりも酸性度が高く，塩基が生成物の脱プロトン化で消費されるため。

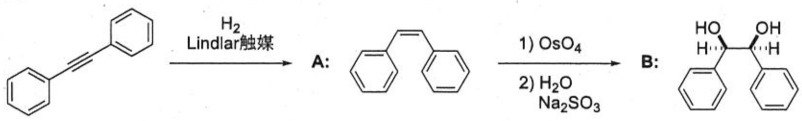
(2)

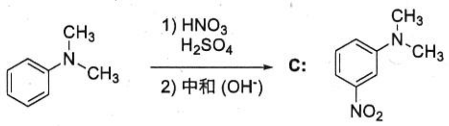


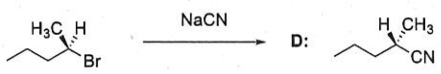
と

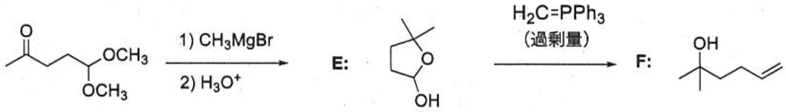


5.









令和5年度

試験名:学群編入学試験　　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 数学1	1. (1) $\cos x$ と $\sin x$ のマクローリン展開は $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$ であるから, $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ を用いて $e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$ $= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \cos x + i\sin x$ となる. (2) ① $\alpha = e^{-1-i\frac{\pi}{2}} = e^{-1}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = -\frac{i}{e}$　よって　$a_1 = 0, b_1 = -e^{-1}$　--(答) オイラーの公式より　$\alpha^m = e^{\left(-1-\frac{i\pi}{2}\right)m} = e^{-m}\left(\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)$ であるから ② m=2 のとき　$\alpha^2 = e^{-2}(\cos\pi - i\sin\pi) = -e^{-2}$ よって$a_2 = -e^{-2}, b_1 = 0$　--(答) ③ $m \geq 3$のとき,　$\alpha^m = e^{-m}\left(\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\right)$ を用いて $m = 4l + 3(l = 0,1,\dots)$のとき, $\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = -1$ より$a_m = 0, b_m = e^{-m}$. $m = 4l\ (l = 1,2,\dots)$のとき, $\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$ より$a_m = e^{-m}, b_m = 0$. $m = 4l + 1(l = 1,2,\dots)$のとき, $\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 1$ より$a_m = 0, b_m = -e^{-m}$ $m = 4l + 2\ (l = 1,2,\dots)$のとき, $\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) = 0$ より$a_m = -e^{-m}, b_m = 0$. --(答) ※ $\alpha^m = e^{\left(-1-\frac{i\pi}{2}\right)m} = e^{-m}(-i)^m$から, $m = 2l(l = 1,2,\dots)$のとき$a_m = (-1)^{\frac{m}{2}}e^{-m}, b_m = 0$, $m = 2l + 1(l = 1,2,\dots)$のとき$a_m = 0, b_m = (-1)^{\frac{m+1}{2}}e^{-m}$, としてもよい. (3) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\sin 4x\, dx$ (n は整数) において <u>$n \neq \pm 4$ であるとき</u>　$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\sin 4x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 4x(\cos nx - i\sin nx)\, dx = 0$ <u>$n = +4$ であるとき</u>　$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i4x}\sin 4x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i4x}\frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i}\, dx = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1 - e^{-i8x}\right) dx = \frac{1}{2i}$ <u>$n = -4$ であるとき</u>　$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i4x}\sin 4x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i4x}\frac{e^{i4x} - e^{-i4x}}{2i}\, dx = \frac{1}{4\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i8x} - 1\right) dx = -\frac{1}{2i}$

令和5年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　【理工学群　　　　　学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 数学１	

２．

(1) $\dfrac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta \quad \dfrac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ より

接線の傾き $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\sqrt{3}$ ，また $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で $(x,y)=\left(\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \dfrac{1}{2}\right)$

よって接線は$y-\frac{1}{2}=\sqrt{3}\left(x-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$　すなわち $y=\sqrt{3}\,x+2-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ --(答)

(2) 面積 $A=\int_0^{2\pi} y\,dx$ について，$y=(1-\cos\theta)$ の置換積分，このとき $dx=(1-\cos\theta)d\theta$

$$A=\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos2\theta)\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_0^{2\pi}=3\pi \quad \text{--(答)}$$

(3) 表面 S は媒介変数を θ と γ として表すと

$$x(\theta,\gamma)=\theta-\sin\theta,\ y(\theta,\gamma)=(1-\cos\theta)\cos\gamma,\ z(\theta,\gamma)=(1-\cos\theta)\sin\gamma$$

となるので，接線ベクトルは，x,y,z 方向の基本ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ を用いて

$$\boldsymbol{r}_\theta=\frac{\partial x}{\partial\theta}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial\theta}\boldsymbol{k}=(1-\cos\theta)\boldsymbol{i}+\sin\theta\cos\gamma\,\boldsymbol{j}+\sin\theta\sin\gamma\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_\gamma=\frac{\partial x}{\partial\gamma}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial\gamma}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial\gamma}\boldsymbol{k}=-(1-\cos\theta)\sin\gamma\,\boldsymbol{j}+(1-\cos\theta)\cos\gamma\,\boldsymbol{k}$$

と表される．$\theta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ を代入して，法線ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\gamma=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{j}+\frac{3}{4}\boldsymbol{k}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{j}+\frac{1}{4}\boldsymbol{k}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{i}-\frac{1}{8}\boldsymbol{j}-\frac{\sqrt{3}}{8}\boldsymbol{k}$$

となるので，単位法線ベクトルは $\left|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\gamma\right|=\dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{j}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{k}$ --(答)

※ 方向は逆でもよい

令和5年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 数学2	（1）固有方程式$\lvert\lambda E-A\rvert=0$を解く。$E$は単位行列である。

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

基本変形
1行に−(3行)
3列に＋(1列)

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -(\lambda-2) & 0\\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & 0 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\{(\lambda-2)^3-2(\lambda-2)-2(\lambda-2)\}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-4)\lambda=0$$

よって，$\lambda_1=0, \lambda_2=2, \lambda_3=2, \lambda_4=4$

（2）$(A-\lambda E)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$より固有ベクトル$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}$を求める。

$\lambda=0$のとき，

$$\begin{cases}2u_1-u_2-u_4=0 & (1)\\ -u_1+2u_2-u_3=0 & (2)\\ -u_2+2u_3-u_4=0 & (3)\\ -u_1-u_3+2u_4=0 & (4)\end{cases}$$

(1)より$u_4=2u_1-u_2$　(5)

(2)より$u_3=-u_1+2u_2$　(6)

(5)(6)を(3)に代入して

$u_2=u_1$　(7)

(7)を(5)(6)に代入して

$u_4=u_1, u_3=u_1$

これは(4)も満たす。

よって，第1成分を0以上になるように正規化した固有ベクトルは，$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

令和5年度

試験名:学群編入学試験　　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図

$\lambda=2$（重解）のとき，

$$\begin{cases} \quad -u_2 \qquad -u_4=0 \\ -u_1 \qquad -u_3 \qquad =0 \\ \quad -u_2 \qquad -u_4=0 \\ -u_1 \qquad -u_3 \qquad =0 \end{cases}$$ より $\begin{cases} u_1=-u_3 \\ u_2=-u_4 \end{cases}$ よって，第1，2成分を0以上になる

ように正規直交化した固有ベクトルは，$\boldsymbol{u}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda=4$のとき，

$$\begin{cases} -2u_1-u_2 \qquad -u_4=0 \\ -u_1-2u_2-u_3 \qquad =0 \\ \qquad -u_2-2u_3-u_4=0 \\ -u_1 \qquad -u_3-2u_4=0 \end{cases}$$ これは，$\begin{cases} u_1\to -u_1 \\ u_3\to -u_3 \end{cases}$ とすると(1)(2)(3)(4)と同じ式。

第1成分を0以上になるように正規化した固有ベクトルは，$\boldsymbol{u}_4=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

このとき、$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4$ は互いに直交する。

（３）$A\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix}$ より

$$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \boldsymbol{u}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad P^{-1}={}^tP=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

このとき，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

令和5年度

試験名:学群編入学試験　　　　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　　分	標 準 的 な 解 答 例 又 は 出 題 意 図
	（4） $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{x}(t)=-A\boldsymbol{x}(t)$ に $\boldsymbol{x}(t)=P\boldsymbol{y}(t)$ を代入して整理すると $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t)=-(P^{-1}AP)\boldsymbol{y}(t)$ $\dfrac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{y}(t)=-\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\boldsymbol{y}(t)$ を解くと， $\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}a_1+b_1t\\a_2\cos(\sqrt{2}t)+b_2\sin(\sqrt{2}t)\\a_3\cos(\sqrt{2}t)+b_3\sin(\sqrt{2}t)\\a_4\cos(2t)+b_4\sin(2t)\end{pmatrix}$ a_n, b_n（$n=1,2,3,4$）は定数。 $\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$， $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\-2\end{pmatrix}$ より $\boldsymbol{y}(0)=P^{-1}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$， $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{y}(0)=\dfrac{d}{dt}P^{-1}\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\end{pmatrix}$ を用いると， $\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\sin(2t)\end{pmatrix}$ 　よって， $\boldsymbol{x}(t)=P\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}\sin(2t)\\-\sin(2t)\\\sin(2t)\\-\sin(2t)\end{pmatrix}$

令和5年度

試験名:学群編入学試験　【理工学群　応用理工学類】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
別解	(別解) (1) $$\lvert \lambda E - A\rvert = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$ $$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \lambda-2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \end{vmatrix}$$ $$= (\lambda-2)\{(\lambda-2)^3 - 2(\lambda-2)\} - (\lambda-2)^2 - (\lambda-2)^2 = (\lambda-2)^2(\lambda-4)\lambda = 0$$ よって，$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 4$ (2) $\lambda = 0$のとき， $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1行\times 1/2 \\ 2行+1行\times 1/2 \\ 3行 \\ 4行+1行\times 1/2 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1行+2行\times 1/3 \\ 2行\times 2/3 \\ 3行+2行\times 2/3 \\ 4行+2行\times 1/3 \end{array} \to$$ $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 4/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & -4/3 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1行+3行\times 1/4 \\ 2行+3行\times 1/2 \\ 3行\times 3/4 \\ 4行+3行 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$ よって，第1成分を0以上になるように正規化した固有ベクトルは，$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = 2$（重解）のとき， $$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -2行 \\ -1行 \\ 3行-1行 \\ 4行-2行 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

令和5年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
補足	（下記参照）

よって，第1，2成分を0以上になるように正規直交化した固有ベクトルは，

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{u}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$\lambda=4$ のとき，

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-2&-1&0&-1\\-1&-2&-1&0\\0&-1&-2&-1\\-1&0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{array}{c}1行\times(-1/2)\\2行+1行\times(-1/2)\\3行\\4行+1行\times(-1/2)\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1/2&0&1/2\\0&-3/2&-1&1/2\\0&-1&-2&-1\\0&1/2&-1&-3/2\end{pmatrix}\begin{array}{c}1行+2行\times1/3\\2行\times(-2/3)\\3行+2行\times(-2/3)\\4行+2行\times1/3\end{array}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1/3&2/3\\0&1&2/3&-1/3\\0&0&-4/3&-4/3\\0&0&-4/3&-4/3\end{pmatrix}\begin{array}{c}1行+3行\times(-1/4)\\2行+3行\times1/2\\3行\times(-3/4)\\4行-3行\end{array}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

よって，第1成分を0以上になるように正規化した固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

このとき、$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4$ は互いに直交する。

補足：

(2)　$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$　も可。

(3) $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $P^{-1}={}^{t}P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ も可。

令和５年度
試験名：学群編入学試験　　　　　　【理工学群応用理工学類】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 物理学１	(1) 速度の周方向成分 $L\frac{d\theta}{dt}$　　加速度の周方向成分 $L\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (2) 運動方程式は $mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$ (3) 運動方程式の両辺に$\frac{d\theta}{dt}$を乗じて積分し，初期条件を考慮すると $$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mV^2$$ (4) $\theta \ll 1$のとき，$\sin\theta \cong \theta$と近似できる。このとき運動方程式は $$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$ となる。この一般解は $$\theta = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + B\right)$$ であるから， $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$ (5)　$T_1 > T_0$ θが微小でないとき，運動方程式は$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$であるが，復元力の大きさは$\lvert -mg\sin\theta\rvert$である。これは$\sin\theta \cong \theta$と近似した場合の復元力の大きさ$\lvert -mg\theta\rvert$に比べて小さくなる。このため，運動の周期$T_1$は，$T_0$に比べて大きくなる。

令和5年度
試験名：学群編入学試験　　【理工学群 応用理工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
解答例 物理学2	(see below)

問(1)

(a) 原点を中心とする半径rの球面にガウスの法則を適用することで以下を得る。

$b < r$ (球殻Bの外側) において, $E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$.

$a < r < b$ (球殻AとBの間) において, $E(r) = 0$.

$0 < r < a$ (球殻Aの内側) において, $E(r) = 0$.

球殻 B の外側での電場は, 原点にある点電荷Qが作る電場と同じであるため, 電位も原点にある点電荷Qが作る電位と同様である。また, 球殻 B の内側には電場が存在しないため, 電位は一定となる。すなわち,

$b < r$ (球殻Bの外側) において, $\phi(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r$.

$a < r < b$ (球殻AとBの間) において, $\phi(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 b$.

$0 < r < a$ (球殻Aの内側) において, $\phi(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 b$.

(b) 球殻の内部では電場がなく, 等電位になっているため球殻 B の電荷が A に移動することはない。

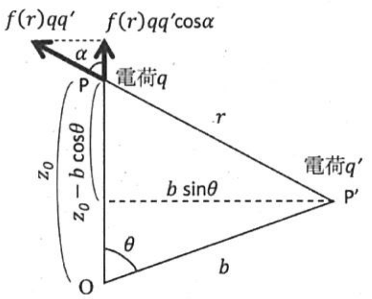
問(2)

(a) 微小面積の電荷をq', 参考図1のように角度αを定義すると, 求める力のz成分f_zは,

$$f_z = f(r)qq'\cos\alpha = f(r)q\frac{Q}{4\pi b^2}b^2\sin\theta d\theta d\phi \times \frac{z_0 - b\cos\theta}{r} = \frac{qQ}{4\pi}f(r)\frac{z_0 - b\cos\theta}{r}\sin\theta d\theta d\phi$$

となる。

(b) 求める力$F(z_0)$は, θを0からπ、ϕを0から2πの範囲でf_zを積分すれば求められる。球対称な系であるため, x, y方向の力は相殺されるためz成分だけ計算すればよい。



参考図1

$$F(z_0) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{qQ}{4\pi}f(r)\frac{z_0 - b\cos\theta}{r}\sin\theta d\theta d\phi$$
$$= \frac{qQ}{2}\int_0^{\pi}f(r)\frac{z_0 - b\cos\theta}{r}\sin\theta d\theta$$

ここで,

$r^2 = (z_0 - b\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2 = {z_0}^2 + b^2 - 2bz_0 \times \cos\theta$より

$$b\cos\theta = \frac{{z_0}^2 + b^2 - r^2}{2z_0}$$

令和5年度

試験名:学群編入学試験　　　　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
	(see below)

$$\sin\theta d\theta = \frac{r}{bz_0}dr$$

であることを用いてθの積分をrの積分に書き換え,

$$F(z_0) = \frac{qQ}{2}\int_{b-z_0}^{b+z_0} f(r)\frac{z_0 - \frac{{z_0}^2 + b^2 - r^2}{2z_0}}{r}\frac{r}{bz_0}dr$$

$$= \frac{qQ}{2}\int_{b-z_0}^{b+z_0} f(r)\frac{\frac{{z_0}^2 - b^2 + r^2}{2z_0}}{r}\frac{r}{bz_0}dr$$

$$= \frac{qQ}{4b{z_0}^2}\int_{b-z_0}^{b+z_0} f(r)({z_0}^2 - b^2 + r^2)dr.$$

(c) $f(r) = C_3 r^{-3}$で$F(z_0)$を計算する。

$$F(z_0) = \frac{qQ}{4b{z_0}^2}C_3\int_{b-z_0}^{b+z_0}\left(\frac{{z_0}^2 - b^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)dr$$

$$= C_3\frac{qQ}{4b{z_0}^2}\left[\frac{(b - z_0)(b + z_0)}{2r^2} + \ln(r)\right]_{b-z_0}^{b+z_0}$$

$$= C_3\frac{qQ}{4b{z_0}^2}\left[\frac{(b + z_0)(b - z_0)}{2(b + z_0)^2} - \frac{(b + z_0)(b - z_0)}{2(b - z_0)^2} + \ln\frac{b + z_0}{b - z_0}\right]$$

$$= C_3\frac{qQ}{4b{z_0}^2}\left(\frac{b - z_0}{2(b + z_0)} - \frac{b + z_0}{2(b - z_0)} + \ln\frac{b + z_0}{b - z_0}\right)$$

$$= C_3\frac{qQ}{4b{z_0}^2}\left(\frac{-2bz_0}{b^2 - {z_0}^2} + \ln\frac{b + z_0}{b - z_0}\right)$$

$f(r) = C_2 r^{-2}$で$F(z_0)$を計算すると、z_0に依らずゼロになる。

$$F(z_0) = \frac{qQ}{4b{z_0}^2}C_2\int_{b-z_0}^{b+z_0}\left(\frac{{z_0}^2 - b^2}{r^2} + 1\right)dr$$

$$= C_2\frac{qQ}{4b{z_0}^2}\left[\frac{(b - z_0)(b + z_0)}{r} + r\right]_{b-z_0}^{b+z_0}$$

$$= C_2\frac{qQ}{4b{z_0}^2}\left((b - z_0) - (b + z_0) + (b + z_0) - (b - z_0)\right)$$

$$= 0$$