令和４年度

私費外国人留学生入試　　　　　　　　　　**【理工学群工学システム学類】**

区分	標準的な解答例又は出題意図
小論文 問題１（配点 30）	問題１

(1)

$$\frac{2(x^2+2x-7)}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{(x+1)}+\frac{c}{(x-3)}$$

とすると，

$$=\frac{a(x-3)+b(x+1)(x-3)+c(x+1)^2}{(x+1)^2(x-3)}$$

$$=\frac{(b+c)x^2+(a-2b+2c)x-(3a+3b-c)}{(x+1)^2(x-3)}$$

より

$$\begin{cases} b+c=2 \\ a-2b+2c=4 \\ 3a+3b-c=14 \end{cases}$$

これを解いて，$a=4$，$b=c=1$ を得る。

$$\int_0^1 \frac{2(x^2+2x-7)}{(x+1)^2(x-3)}dx=\int_0^1\frac{4}{(x+1)^2}dx+\int_0^1\frac{1}{x+1}dx+\int_0^1\frac{1}{x-3}dx$$

$$=\left[-\frac{4}{x+1}+\log|x+1|+\log|x-3|\right]_0^1$$

$$=\left(-\frac{4}{2}+\log|2|+\log|-2|\right)-\left(-\frac{4}{1}+\log|1|+\log|-3|\right)$$

$$=(-2+2\log 2)-(-4+\log 3)=2+2\log 2-\log 3$$

$$=2+\log\frac{4}{3}$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3+\cos^2 x}dx$$

ここで，　$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より　$\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{3+(1-\sin^2 x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{4-\sin^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2+\sin x}+\frac{1}{2-\sin x}\right)\cos x\,dx$$

$u=\sin x$ とおくと $du=\cos x\,dx$

x	$0\to\pi/2$
u	$0\to 1$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)du=\frac{1}{4}\left[\log|2+u|-\log|2-u|\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}\{(\log 3-\log 1)-(\log 2-\log 2)\}=\frac{1}{4}\log 3$$

(3)

$$\int_0^{e-1} (\log(x+1))^2 dx$$

部分積分 $\int fg = f^* g - \int f^* g'$ を用いる。

$f = (x+1)'$

$g = (\log(x+1))^2$

$$\int_0^{e-1} (\log(x+1))^2 dx$$

$$= [(x+1)(\log(x+1))^2]_0^{e-1}$$

$$- \int_0^{e-1} \left\{(x+1) \cdot 2\frac{1}{x+1}\log(x+1)\right\} dx$$

$$= [(x+1)(\log(x+1))^2]_0^{e-1} - 2\int_0^{e-1} \log(x+1)\, dx$$

ここで, $[(x+1)(\log(x+1))^2]_0^{e-1} = e(\log(e))^2 = e$ より,

$$\int_0^{e-1} (\log(x+1))^2 dx = e - 2\int_0^{e-1} \log(x+1)\, dx$$

また,

$$\int_0^{e-1} \log(x+1)\, dx = [(x+1)\log(x+1)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} (x+1)\frac{1}{x+1} dx$$

$$= e - [x]_0^{e-1} = 1$$

以上から,

$$\int_0^{e-1} (\log(x+1))^2 dx = e - 2 \cdot 1 = e - 2$$

問題２（配点 30）

(1) 注入し始めてからt秒後の水の体積Vは

$$V = kt$$

となる。一方、水面の面積$S(z)$と高さhから、

$$V = \int_0^h S(z)\,dz$$

が得られる。それぞれをtで微分すると，

$$\frac{dV}{dt} = k$$

と，合成関数の微分の公式より

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{d}{dh}\int_0^h S(z)\,dz\right)\cdot\frac{dh}{dt} = S(h)\cdot\frac{2+h}{\log(2+h)}$$

となる。これら結果から，

$$k = S(h)\cdot\frac{2+h}{\log(2+h)}$$

が得られる。ここから

$$S(h) = k\cdot\frac{\log(2+h)}{2+h}$$

が得られる。

(2)(1)で得られた$S(h)$の増減のふるまいを調べれば良い。

$$S'(h) = k\left\{\frac{1-\log(2+h)}{(2+h)^2}\right\}$$

$S'(h) = 0$のときが極値となるので，

$$1-\log(2+h) = 0$$
$$h = e-2$$

以下の増減表から，<u>$h = e-2$のとき最大となる。</u>

h	0	・・・	$e-2$	・・・	1
$S'(h)$		+	0	−	
$S(h)$		↗		↘	

(3) hはtの関数であり，その微分が問題文において

$$\frac{dh}{dt} = v = \frac{2+h}{\log(2+h)}$$

と与えられている。逆関数の微分の公式を使えば

$$\frac{dt}{dh} = \frac{\log(2+h)}{2+h}$$

が得られる。ここで，両辺を$0 \le h \le e-2$で積分すればよい。つまり

$$T = \int_0^{e-2}\frac{\log(2+h)}{2+h}\,dh$$

$x = \log(2+h)$ とおくと，

$$\frac{dx}{dh} = \frac{1}{2+h}$$

より，

$$T = \int_{\log 2}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\log 2}^{1}$$
$$= \frac{1}{2}\{1-(\log 2)^2\}$$

が答えとなる。

問題３（配点 40）	（出題意図） 力学における重力下での運動，単振動，力学的エネルギー保存則について出題している。これは大学で学ぶ力学の基礎となる知識を問うものである。 （解答例） 解答例 （1）　板A：$ma=-k(x-l_0)-R-mg\sin\theta$ ---① 　　　小球B：$Ma=R-Mg\sin\theta$ ---② （2）　①から　$a=-\frac{k}{m}(x-l_0)-\frac{1}{m}R-g\sin\theta$ ---③ 　　　②から　$a=\frac{1}{M}R-g\sin\theta$ ---④ 　　　④－③すると 　　　$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)R=\frac{k}{m}(l_0-x)$ 　　　$R=\frac{Mk}{m+M}(l_0-x)$ ---⑤ （3）　$R=0$ のときに離れるため，　$x=l_0$ （4）　速さをVとすると， 　　　$\frac{1}{2}(m+M)V^2+(m+M)gl_0\sin\theta=\frac{1}{2}k(d+s)^2+(m+M)g(l_0-d-s)\sin\theta$ 　　　$\frac{1}{2}(m+M)V^2=\frac{1}{2}k(d+s)^2-(m+M)g(d+s)\sin\theta$ 　　　$V=\sqrt{\frac{k(d+s)^2}{m+M}-2(d+s)g\sin\theta}$ （5）　離れた後の運動方程式は 　　　$ma=k(l_0-x)-mg\sin\theta$ 　　　釣り合いの条件から　$ks=mg\sin\theta$を代入すると，運動方程式は 　　　$ma=k(l_0-s-x)=-k(x-(l_0-s))$ 　　　$x=l_0-s$，（即ち釣り合いの位置が振動の中心） 　　　または，$x=l_0-mg\sin\theta/k$