理工　　応用理工

数学 1　試験問題

解析学の基本事項に関する理解度, 及び計算力を試す.

(1) 定義より（あるいは加法定理より）$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

$r^2 = (\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \left(1 - \cos^2 x\right)$

$\cdot \sinh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y$. したがって, (a) $\sinh^2 y$.

(2) $F_x(x, y) = 2x - 2y,\ F_y(x, y) = -2x + 18y,\ F_{xx}(x, y) = 2.$

(a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{2x - 2y}{-2x + 18y} = 0$ より $x = y$. $F(x, y) = 0$ とから

$y^2 - 2y^2 + 9y^2 - 8 = 0$ より $8y^2 - 8 = 0$, すなわち $y = \pm 1$. このとき

$F_y \neq 0$. したがって, 停留点は $x = \pm 1$.

(b) $F_x(x, y) = 0$ のとき, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{F_{xx}}{F_y} = -\dfrac{2}{-2x + 18y}$. したがって,

$(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ において $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \mp \dfrac{1}{8}$（複号同順）.

(c) $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ において $\dfrac{d^2y}{dx^2} \lesseqgtr 0$（複号同順）より 極大値 $f(1)$

$= 1$, 極小値 $f(-1) = -1$ をもつ.

(3) (a) $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\tan^{-1} x\Big]_0^A \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ $(A \to \infty)$ より $\underline{\underline{I_1 = \dfrac{\pi}{2}}}$.

(b) $n \geq 2$ のとき,

$$J_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx$$
$$= J_{n-1} + \int x \cdot \frac{-x}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

$\displaystyle\left(\frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}\right)' = \frac{-x}{(1+x^2)^n}$ より

$$\begin{aligned} J_n =& J_{n-1} + x \cdot \frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx \\ &= J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} J_{n-1} \\ &= \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}. \end{aligned}$$

$\displaystyle\left[\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right]_0^A \longrightarrow 0$ $(A \to \infty)$ より $\displaystyle I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$.

したがって,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} I_1 = \underline{\underline{\frac{(2n-3)(2n-5)\cdot \cdots \cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdot \cdots \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}}}$$
$$\left(= \underline{\underline{\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\{(n-1)!\}^2} \cdot \pi}} \right)$$

別法) $x^2 = t$ とおくと,

$$\begin{aligned} I_n =& \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right) \\ =& \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdot \cdots \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{(n-1)!} \\ =& \cdots \end{aligned}$$

より同じ結果を得る.

数学２

［出題意図］
応用理工学類および工学システム学類での授業内容を理解できるだけの数学の学力があるかを調べる。この問題では，線形代数で扱う行列の固有値，固有ベクトル，対角化に関する応用力の基礎的な理解について調べる。

［解答例］
1.

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおくと，$4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=(x\ \ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=ax^2+2bxy+cy^2$

よって，$A=\begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}$

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 6-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-7)=0 \quad \therefore\ \lambda_1=3$，$\lambda_2=7$

(3) $\lambda_1=3$ のとき，正規化された固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とすると，

$(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ より，$x_1-\sqrt{3}x_2=0\ \ \therefore \boldsymbol{x}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=7$ のとき，同様に，正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

[別解]$-x_1$や$-x_2$でも可。

(4) $A=P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}P^{-1}$ と対角化されるとき，

正規化された固有ベクトルを並べることにより

$P=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$，$P^{-1}={}^{t}P=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

[注]　(3)の解答に応じて、別解あり。

(5)　2 次曲線 C は，(3)の結果を用いて $(x\ \ y)P\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=21$ と表せる。

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\mathrm{P}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ を転置すると $(x'\ \ y')=(x\ \ y)\,P$。また、$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ である。

したがって $(x'\ \ y')\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=21$

よって，$\dfrac{x'^2}{7}+\dfrac{y'^2}{3}=1$

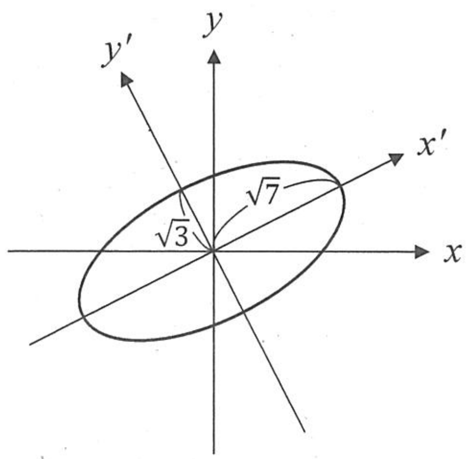
(6) $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}x+y\\ x-\sqrt{3}y\end{pmatrix}$ より，

x' 軸は直線 $y'=0$ であるから，　$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

y' 軸は直線 $x'=0$ であるから，　$y=-\sqrt{3}x$

(7) 下記の楕円。

[注] x’軸と y’軸がある程度正しく書かれていること、x’y’平面で楕円となること、長軸が x’軸であることが分かれば正解とする。



物理学１

	出題意図：剛体の回転運動の理解を問う。
（1）	$$I_0=\rho\int_0^a r^2 2\pi r dr=2\pi\rho\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a=\frac{1}{2}\pi\rho a^4$$ $\rho=M/\pi a^2$を代入して， $$I_0=\frac{1}{2}\pi\rho a^4=\frac{1}{2}Ma^2$$
（2）	点 C 回りの円板の慣性モーメントIは $$I=I_0+Ma^2$$ の関係があるので， $$I=\frac{3}{2}Ma^2$$
（3）	運動方程式は，以下のとおりとなる． $$I\ddot{\theta}=-Mg\,a\cos\theta$$
（4）	運動方程式の両辺に$2I\dot{\theta}$をかける． $$2I^2\ddot{\theta}\dot{\theta}=-2Mg\,a\,I\cos\theta\ \dot{\theta}$$ t で積分する． $$I^2\dot{\theta}^2=-2Mg\,a\,I\sin\theta+A$$ ここで，A は積分定数．円板が点 C に接触するとき，$\sin\theta=3/4$，角運動量は$Mv\left(a-\frac{1}{4}a\right)+I_0\frac{v}{a}$となるので代入する． $$A=\left(\frac{3}{4}Ma+\frac{I_0}{a}\right)^2v^2+\frac{3}{2}M\,g\,a\,I$$ 上式を A に代入する． $$I^2\dot{\theta}^2=\left(\frac{3}{4}Ma+\frac{I_0}{a}\right)^2v^2+\frac{3}{2}M\,g\,a\,I-2Mg\,a\,I\sin\theta$$ 両辺をI^2で割る． $$\dot{\theta}^2=\frac{1}{I^2}\left\{\left(\frac{3}{4}Ma+\frac{I_0}{a}\right)^2v^2+\frac{3}{2}M\,g\,a\,I-2Mg\,a\,I\sin\theta\right\}$$ 円板の点 C まわりの角速度$\dot{\theta}$は，円板が点 C に接触する瞬間が最大で，θが$\frac{1}{2}\pi$となるときに最小となる．そのため，$\theta=\frac{1}{2}\pi$で$\sin\theta=1$となるため，それと同時に$\dot{\theta}=0$とれば，段差をちょうど上がり切る．その速度を求めると，以下の式を満たす．

$$\left(\frac{3}{4}Ma+\frac{I_0}{a}\right)^2 v^2-\frac{1}{2}M\,g\,a\,I=0$$

$v>0$であるため，以下のとおりとなる．

$$v=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}M\,g\,a\,I}}{\frac{3}{4}Ma+\frac{I_0}{a}}$$

この速度より早ければ良いので，vの条件は，以下のとおりとなる．

$$v \geqq \frac{\sqrt{\frac{1}{2}M\,g\,a\,I}}{\frac{3}{4}Ma+\frac{I_0}{a}}$$

$I_0=\frac{1}{2}Ma^2$，$I=\frac{3}{2}Ma^2$を代入して，

$$v \geqq \frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{ga}$$

<u>別解</u>

点Cに接触する前後で角運動量は保存されるので，

$$Mv\left(a-\frac{1}{4}a\right)+I_0\frac{v}{a}=I\,\omega$$

より，

$$\omega=\frac{5}{6}\frac{v}{a}$$

円板が点C回りに回転を始めるときの運動エネルギーによって高さ$1/4a$の段差を上がるので，

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{5}{6}\frac{v}{a}\right)^2 \geqq \frac{Mga}{4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{3}{2}Ma^2\left(\frac{5}{6}\frac{v}{a}\right)^2 \geqq \frac{Mga}{4}$$

$I=\frac{3}{2}Ma^2$を代入して整理する．

$$\frac{3}{4}\frac{25}{36}v^2 \geqq \frac{ga}{4}$$

	$$v^2 \geqq \frac{1}{3}\frac{36}{25}ga = \frac{12}{25}ga$$ 両辺とも正なので $$v \geqq \frac{2\sqrt{3}}{5}\sqrt{ga}$$

物理学２

[出題意図]

鏡像法を用いた電場の求め方および誘電体界面での電場の境界条件の理解を問う。

(1) 全体の静電ポテンシャルは以下のようになる。

$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{-1/2} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1}\{x^2+y^2+(z+d)^2\}^{-1/2}$$

電場は，ϕをx, y, z方向についてそれぞれ偏微分し，符号を逆にして次のようになる。

$$E_{1x}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{x}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{x}{\{x^2+y^2+(z+d)^2\}^{3/2}}$$

$$E_{1y}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{y}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{y}{\{x^2+y^2+(z+d)^2\}^{3/2}}$$

$$E_{1z}(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{z-d}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{z+d}{\{x^2+y^2+(z+d)^2\}^{3/2}}$$

$z=0$を代入し，次の解を得る。

$$E_{1x}(x,y,0) = \frac{q+q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{x}{\{x^2+y^2+d^2\}^{3/2}}$$

$$E_{1y}(x,y,0) = \frac{q+q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{y}{\{x^2+y^2+d^2\}^{3/2}}$$

$$E_{1z}(x,y,0) = -\frac{q-q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{d}{\{x^2+y^2+d^2\}^{3/2}}$$

(2) 全体の静電ポテンシャルは以下のようになる。

$$\phi(x,y,z) = \frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{-1/2}$$

x, y, z方向についてそれぞれ偏微分し，次のようになる。

$$E_{2x}(x,y,z) = \frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\frac{x}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}}$$

$$E_{2y}(x,y,z) = \frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\frac{y}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}}$$

$$E_{2z}(x,y,z) = \frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\frac{z-d}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}}$$

$z=0$を代入し，次の解を得る。

化学1

●出題意図解答

応用理工学類での授業内容を理解できるだけの化学的な素養があるのかを、化学熱力学および反応速度論に関する基本事項の観点から調べる。

1 (1) 反応は発熱的である。

(2) $\Delta_r S^{\ominus} = 69.9 - \{130.7 + \frac{1}{2}(205.1)\} = -163.35 = \underline{-163\ \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}}$

(3) $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ より

$\Delta G^{\ominus} = (-285{,}800\ \mathrm{J\,mol^{-1}}) - (298\ \mathrm{K}) \times (-163.4\ \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}})$

$= -237106\ \mathrm{J\,mol^{-1}} = \underline{-237\ \mathrm{kJ\,mol^{-1}}}$ (アトキンス物理化学(上)10版: $-237.13\ \mathrm{kJ\,mol^{-1}}$)

(4) $\Delta G^{\ominus}$が負であるため，反応は自発的である。

2 アセチルコリンエステラーゼが 1 s に分解できるアセチルコリンの分子数は(1 s)/(6.25 × 10^{-5} s) = 16000

(*J. Biol. Chem.* **1991**, 266, 7, 4025)

つまり，アセチルコリンエステラーゼは, 1 ms あたり 16 分子のアセチルコリンを分解できる。

本問題で 1 ms の間に分解したいアセチルコリン分子数は

$(1 \times 10^{-12}\ \mathrm{mol})(0.9)(6.02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}) = 5.418 \times 10^{11}$

従って，求めるアセチルコリンエステラーゼの分子数は $(5.418\times10^{11})/16 = 3.386\times10^{10}$ $= \underline{3.4\times10^{10}}$

3 (1) 「ln([A]/[A]$_0$)と t が一次線形の関係にあるため，一次である」

「t に対し, ln([A]/[A]$_0$)をプロットすると勾配－k の直線を与えるため，一次である」など

（積分型の一次の速度式 “$\ln([A]/[A]_0) = -kt$” を示す必要はない）

(2) 一次の速度式 $d[A]/dt = -k\,[A]$ の積分型は $\ln([A]/[A]_0) = -kt$

実験結果をみると，ln([A]/[A]$_0$)値が 1000 s 毎に－0.350 減っているので

$k_r = 0.350\times10^{-3} = \underline{3.50\times10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}}$

(3) 半減期 $t_{1/2}$ のとき，$[A] = \frac{1}{2}[A]_0$ これを速度式に代入すると

$kt_{1/2} = -\ln\left(\frac{1}{2}[A]_0/[A]_0\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 = 0.693$ より

$t_{1/2} = 0.693/(3.50\times10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}) = \underline{1.98\times10^{3}\ \mathrm{s}}$

(4) $[P_0] = 0$ のとき，$[A] + [P] = [A]_0$ であるから，$[P] = [A]_0 - [A]$

$\ln [A]/[A]_0 = -kt$ より

$[A]/[A]_0 = e^{-kt}$ つまり $\underline{[P] = [A]_0\,(1 - e^{-kt})}$

化学2

●出題意図解答

応用理工学類での授業内容を理解できるだけの化学的な素養があるのかを、有機分子の性質および反応性に関する基本事項の観点から調べる。

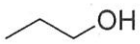
1.

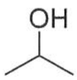
(1) 3-メチルヘキサン

(2) 4-ペンテン-2-オン　（ペンタ-4-エン-2-オン）

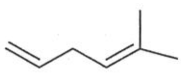
(3) (*E*)-3,6,6-トリメチル-3-ヘプテン　((*E*)-3,6,6-トリメチルヘプタ-3-エン)

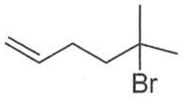
2.

(1) 

(2) 

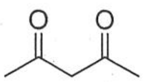
3.

(1) 

(2) 

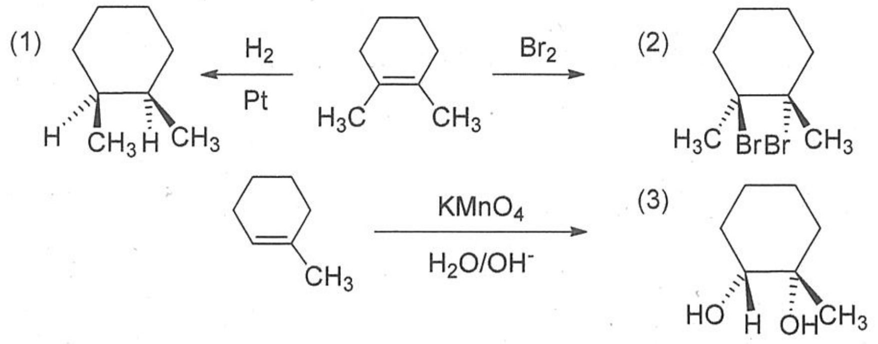
(3) 

4.

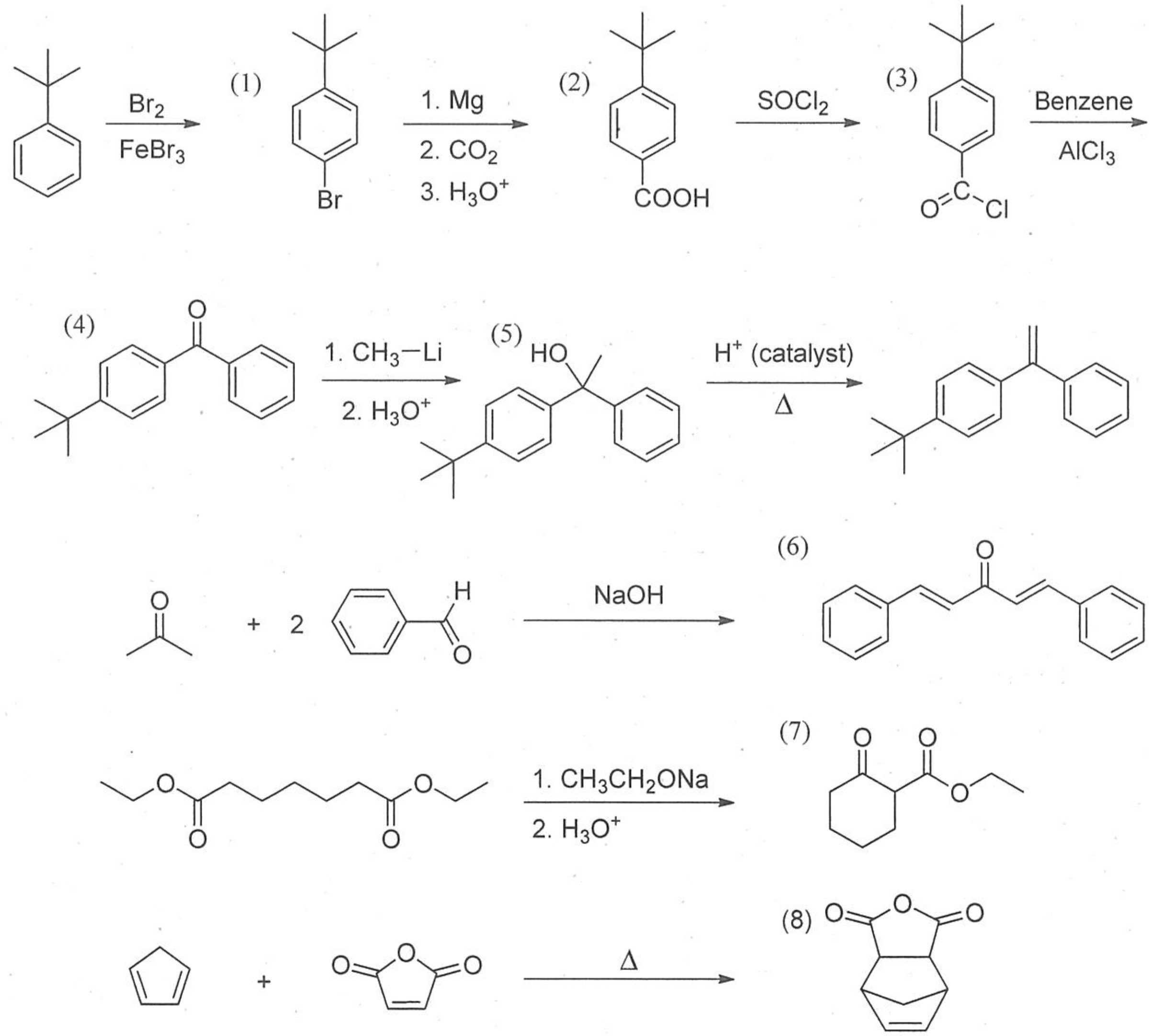
(1) 

(2) 

5.



6.



（8）立体の区別が書かれていた場合、endo 付加体、exo 付加体のどちらでも正解とする