

令和3年度

理工学群数学類  
私費外国人留学生入試

小論文  
試験問題

注意事項

- ① 問題Ⅰ～問題Ⅲは別々の解答用紙に日本語で解答してください。
- ② 試験時間は90分です。

**問題 I**  $\alpha = 5 + 2\sqrt{6}$  とし,  $\beta$  は  $\alpha$  とは異なる実数とする.  $a, b$  は整数で, 2 次方程式  $x^2 - ax + b = 0$  の解が  $\alpha$  と  $\beta$  であるとする. 正の整数  $n$  に対して,  $C_n = \alpha^n + \beta^n$  とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $\beta$  および  $a, b$  を求めよ. ただし, 必要であれば  $\sqrt{6}$  が無理数であることを用いてよい.
- (2)  $C_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は正の整数であることを示せ.
- (3)  $C_{4m}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) の一の位の数  $2$  であることを示せ.
- (4)  $[\alpha^{4m+2}]$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) の一の位の数  $2$  を求めよ. ただし, 実数  $r$  に対して,  $r$  を越えない最大の整数を  $[r]$  で表す.

**問題 II** 正の整数  $m$  と  $n$  に対して,

$$S_{m,n} = \sum_{k=1}^n k^m$$

とおく. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $S_{1,n} = \frac{n(n+1)}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を示せ.
- (2)  $m$  を正の整数とする. 以下を示せ.

$$\sum_{k=1}^n \{(k+1)^{m+1} - k^{m+1}\} = (n+1)^{m+1} - 1$$

- (3)  $m$  に関する数学的帰納法を用いて,  $S_{m,n}$  が  $n$  の  $m+1$  次の整式で表されることを示せ.
- (4) 以下の極限値を求めよ. ただし, (b) の  $s$  は (a) の極限値を表す.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}}{n^{m+1}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{S_{m,n}}{n^m} - sn \right)$$

問題 III 以下の問いに答えよ.

(1) 不定積分  $\int \frac{1}{\sin x} dx$  を求めよ.

(2) 関数  $g(x)$  を次で定める.

$$g(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ x^2 & (x > 1) \end{cases}$$

このとき, 定積分  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} g\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin x}\right) dx$  を求めよ.