令和4年度
試験名：私費外国人留学生入試　　　　　【理工学群　応用理工学類】

<table>
<tr><th>区　　分</th><th>標準的な解答例又は出題意図</th></tr>
<tr><td>問題 1</td><td>

【解答】

問 1

(1)

$$\frac{2(x^2+2x-7)}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{a}{(x+1)^2}+\frac{b}{(x+1)}+\frac{c}{(x-3)}$$

とすると，

$$=\frac{a(x-3)+b(x+1)(x-3)+c(x+1)^2}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{(b+c)x^2+(a-2b+2c)x-(3a+3b-c)}{(x+1)^2(x-3)}$$

より

$$\begin{cases} b+c=2 \\ a-2b+2c=4 \\ 3a+3b-c=14 \end{cases}$$

これを解いて，$a=4$，$b=c=1$ を得る。

$$\int_0^1 \frac{2(x^2+2x-7)}{(x+1)^2(x-3)}dx=\int_0^1 \frac{4}{(x+1)^2}dx+\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{x-3}dx$$

$$=\left[-\frac{4}{x+1}+\log|x+1|+\log|x-3|\right]_0^1$$

$$=\left(-\frac{4}{2}+\log|2|+\log|-2|\right)-\left(-\frac{4}{1}+\log|1|+\log|-3|\right)$$

$$=(-2+2\log 2)-(-4+\log 3)=2+2\log 2-\log 3=2+\log\frac{4}{3}$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}dx$$

ここで，　$\sin^2 x+\cos^2 x=1$　より　$\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+(1-\sin^2 x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4-\sin^2 x}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2+\sin x}+\frac{1}{2-\sin x}\right)\cos x\,dx$$

$u=\sin x$　とおくと $du=\cos x\,dx$

x	$0\to{}^{\pi}/_{2}$
u	$0\ \to 1$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)du=\frac{1}{4}[\log(2+u)-\log(2-u)]_0^1$$

</td></tr>
</table>

$$=\frac{1}{4}\{(\log 3-\log 2)-(0-\log 2)\}=\frac{1}{4}\log 3$$

(3)

$$\int_0^{e-1}(\log(x+1))^2dx$$

部分積分 $\int fg=f^*g-\int f^*g'$ を用いる。

$f=(x+1)'$

$g=(\log(x+1))^2$

$$\int_0^{e-1}(\log(x+1))^2dx=[(x+1)(\log(x+1))^2]_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\left\{(x+1)\cdot 2\frac{1}{x+1}\log(x+1)\right\}dx$$

$$=[(x+1)(\log(x+1))^2]_0^{e-1}-2\int_0^{e-1}\log(x+1)\,dx$$

ここで, $[(x+1)(\log(x+1))^2]_0^{e-1}=e(\log(e))^2=e$ より,

$$\int_0^{e-1}(\log(x+1))^2dx=e-2\int_0^{e-1}\log(x+1)\,dx$$

また,

$$\int_0^{e-1}\log(x+1)\,dx=[(x+1)\log(x+1)]_0^{e-1}-\int_0^{e-1}(x+1)\frac{1}{x+1}dx=e-[x]_0^{e-1}=1$$

以上から,

$$\int_0^{e-1}(\log(x+1))^2dx=e-2\cdot 1=e-2$$

令和4年度

試験名：私費外国人留学生入試　　　　　　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　　分	標 準 的 な 解 答 例 又 は 出 題 意 図
問題1	問２【本作品についてねらいと相談事項】 数学 III，水の問題。(1)体積の変化率と合成関数の微分に関する着想の問いかけ。(2) 増減表の作成，最大値の判定を問いかけるもの。(3)は逆関数の微分と定積分を問いかけるもの，となっている。 【解答例】 (1) 注入し始めてからt秒後の水の体積Vは $V = kt$ となる。一方、水面の面積$S(z)$と高さhから、 $V = \int_0^h S(z)\,dz$ が得られる。それぞれをtで微分すると， $\frac{dV}{dt} = k$ と，合成関数の微分の公式より $\frac{dV}{dt} = \left(\frac{d}{dh}\int_0^h S(z)\,dz\right)\cdot\frac{dh}{dt} = S(h)\cdot\frac{2+h}{\log(2+h)}$ となる。これら結果から， $k = S(h)\cdot\frac{2+h}{\log(2+h)}$ が得られる。ここから $S(h) = k\cdot\frac{\log(2+h)}{2+h}$ が得られる。 (2)(1)で得られた$S(h)$の増減のふるまいを調べれば良い。 $S'(h) = k\left\{\frac{1-\log(2+h)}{(2+h)^2}\right\}$ $S'(h) = 0$のときが極値となるので， $1 - \log(2+h) = 0$ $h = e - 2$ 以下の増減表から，$\underline{h = e - 2}$<u>のとき最大となる。</u>

h	0	・・・	$e-2$	・・・	1
$S'(h)$		$+$	0	$-$	
$S(h)$		↗		↘	

(3) $S(h)$が最大となるときの時間をT、水の体積をVとすると、

$$T=\frac{V}{k}=\left(\int_0^{e-2}S(h)\,dh\right)/k=\int_0^{e-2}\frac{\log(2+h)}{2+h}dh$$

$x=\log(2+h)$ とおくと,

$$\frac{dx}{dh}=\frac{1}{2+h}$$

より,

$$T=\int_{\log 2}^{1}x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\log 2}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\{1-(\log 2)^2\}$$

が答えとなる。

【別解】hはtの関数であり，その微分が問題文において

$$\frac{dh}{dt}=v=\frac{2+h}{\log(2+h)}$$

と与えられている。逆関数の微分の公式を使えば

$$\frac{dt}{dh}=\frac{\log(2+h)}{2+h}$$

が得られる。ここで，両辺を$0\leq h\leq e-2$で積分すればよい。つまり

$$T=\int_0^{e-2}\frac{\log(2+h)}{2+h}dh$$

$x=\log(2+h)$ とおくと,

$$\frac{dx}{dh}=\frac{1}{2+h}$$

より,

$$T=\int_{\log 2}^{1}x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\log 2}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\{1-(\log 2)^2\}$$

が答えとなる。

令和4年度

試験名：私費外国人留学生入試　　　　　　　　**【理工学群　応用理工学類】**

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
問題2	（出題意図） 力学における重力下での運動，単振動，力学的エネルギー保存則について出題している。これは大学で学ぶ力学の基礎となる知識を問うものである。 （解答例） 解答例 （1）　板A：$ma = -k(x - l_0) - R - mg\sin\theta$ ---① 　　　小球B：$Ma = R - Mg\sin\theta$ ---② （2）　①から　$a = -\frac{k}{m}(x - l_0) - \frac{1}{m}R - g\sin\theta$ ---③ 　　　②から　$a = \frac{1}{M}R - g\sin\theta$ ---④ 　　　④－③すると 　　　$(\frac{1}{m} + \frac{1}{M})R = \frac{k}{m}(l_0 - x)$ 　　　$R = \frac{Mk}{m+M}(l_0 - x)$ ---⑤ （3）　$R = 0$ のときに離れるため，　$x = l_0$ （4）　速さをVとすると， 　　　$\frac{1}{2}(m+M)V^2 + (m+M)gl_0\sin\theta = \frac{1}{2}k(d+s)^2 + (m+M)g(l_0 - d - s)\sin\theta$ 　　　$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}k(d+s)^2 - (m+M)g(d+s)\sin\theta$ 　　　$V = \sqrt{\frac{k(d+s)^2}{m+M} - 2(d+s)g\sin\theta}$ （5）　離れた後の運動方程式は 　　　$ma = k(l_0 - x) - mg\sin\theta$ 　　　釣り合いの条件から　$ks = mg\sin\theta$を代入すると，運動方程式は 　　　$ma = k(l_0 - s - x) = -k(x - (l_0 - s))$ 　　　$x = l_0 - s$，（即ち釣り合いの位置が振動の中心） 　　　または，$x = l_0 - mg\sin\theta/k$