令和４年度学群編入学試験

理工学群物理学類

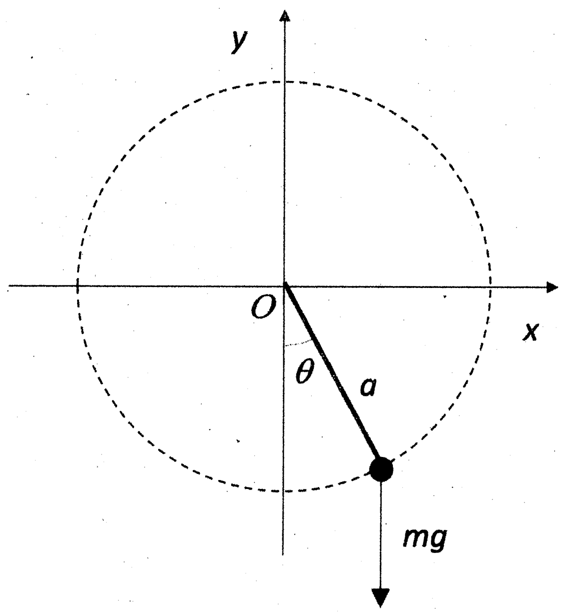
学　力　検　査
（専門科目）
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅲのすべてに解答すること。
② 解答用紙は各問題に対して１枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。
③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。
④ 下書き用紙は採点しない。
⑤ 試験時間は 120 分です。

問題 I

図に示すように、一端に質量mの球を付けた直線上の棒（長さa）のもう一方の端を原点Oに固定する。棒は原点Oの周りに滑らかに回転できる。球の大きさ、及び棒の太さと質量は無視できるとし、重力のもとでの運動を考察する。y軸方向を鉛直上向きに取り、図のようにxy座標を定義し（球と棒はxy平面内にあるとし）、棒とy軸の負の方向とがなす角をθとする。重力加速度の大きさをgとして、以下の問いに答えよ。



問 1　空気抵抗が無視できる場合、角度$\theta(t)$が満たす運動方程式を求めよ。

問 2　このとき、次式の球のエネルギーEが保存することを示せ。

$E = \frac{1}{2}ma^2(\frac{d\theta}{dt})^2 + mga(1 - \cos\theta)$

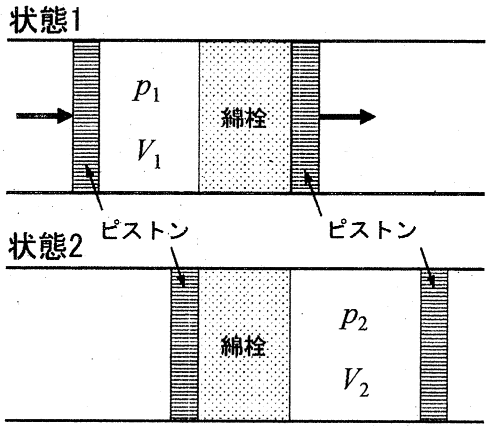
問 3　球を、時刻$t = 0$で、角度$\theta = 0$の位置から、初速v_0でx軸の正の方向へ運動させた。初速v_0が小さい場合、球は$\theta = 0$の周りで微少振動する。このとき、角度$\theta(t)$を時間の関数として求めよ。また、振動の周期を求めよ。

問 4　球の速度に比例する空気抵抗が働く場合、運動方程式に、抵抗$-m\alpha\frac{d\theta}{dt}$を加えれば良い（$\alpha$は正の定数）。抵抗は小さいとして（$\alpha < 2\sqrt{ag}$）、問 3 と同じ条件で運動を開始した場合、角度$\theta(t)$を時間の関数として求めよ。

問 5　問 4 の空気抵抗が大きくなると（$\alpha \geq 2\sqrt{ag}$）、運動がどのように変わるかを述べよ。

問題 II

図のように，気体が通り抜けられる綿栓で仕切られたシリンダーに気体が入っている。左右のピストンにそれぞれ一定の力を加えて，左側から右側へ圧力を保ちながら気体を押し出す。ここでは，状態 1 から状態 2 へ変化させる過程を考える。状態 1 では綿栓の右側に気体が無く，状態 2 では綿栓の左側に気体が無いとし、綿栓内部の気体は無視できる。状態 1，状態 2 における，気体の圧力，温度，体積，内部エネルギー，エンタルピーを，それぞれ p_1，T_1，V_1，U_1，H_1 および p_2，T_2，V_2，U_2，H_2 とする(ただし $p_1 > p_2$)。綿栓はシリンダーに固定されており，ピストンは滑らかに動く。系は全体として断熱されている。R は気体定数である。このとき，以下の問いに答えよ。



問1.　この過程における，内部エネルギーの差 $\Delta U = U_2 - U_1$ を，p_1, V_1, p_2, V_2 を用いて表せ。

問2.　問 1 の結果を用い，この過程でエンタルピー $H = U + pV$ が保存されること，すなわち $H_1 = H_2$ を示せ。

以下では，$\Delta p = p_2 - p_1 \to 0$ の圧力差が小さいときを考える。状態 1 から状態 2 への変化の過程を一つの気体の状態変化と考え，気体の圧力を p，温度を T，体積を V，内部エネルギーを U，エンタルピーを H ($H = U + pV$) とする。

問3.　エンタルピーHを温度Tと圧力pの関数と考え，等エンタルピー過程では，

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = -\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p}$$

であることを示せ。

この$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$を Joule-Thomson 係数と呼ぶ。Joule-Thomson 係数が正の時，状態 2 での温度は状態 1 より低くなるので，この過程により気体は冷却される。Joule-Thomson 係数を以下の手続きで求める。

問4.　熱力学第一法則を用い，定圧熱容量が$C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$で与えられることを示せ。

問5.　以下の関係式を導け。

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + V$$

ただしSを気体のエントロピーとして, Maxwell の関係式$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$を用いても良い。

問6.　状態方程式が，温度の関数$B(T)$を用いて

$$pV = RT + B(T)p$$

と近似できる場合、Joule-Thomson 係数$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$を$T$，$C_p$，$B(T)$を用いて表せ。

問7.　van der Waals 気体を考えると

$$B(T) = b - \frac{a}{RT}$$

となる。a，bは気体に依存して決まる正の定数である。問 6 の結果を用いて，van der Waals 気体の Joule-Thomson 係数は，X，Yを定数として

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{1}{C_p}\left(\frac{X}{RT} + Y\right)$$

と書ける。X，Yをa，bを用いて求めよ。

また，この過程により van der Waals 気体を冷却するために，状態 1 の温度T_1が満たすべき条件を求めよ。

問題 III

3 次元空間における真空中の静電場の問題を考える。真空の誘電率をε_0，空間に生じる静電場を $\vec{E}(\vec{r})$と表すものとする。ただし$\vec{r}$は位置ベクトルである。以下の問いに答えよ。

問1．3 次元空間の原点 $\vec{r}=\vec{0}$に正の点電荷 q_1が置かれている場合を考える。$\vec{r}\neq\vec{0}$ の場合に，$\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r})$と $\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})$の値を求めよ。

問2．3 次元空間の原点 $\vec{r}=\vec{0}$ に正の点電荷 q_1が置かれており，さらに原点からの距離が a_2の場所に別の正の点電荷 q_2が置かれている場合を考える。原点を中心とする半径 a_0の球面をSとするとき，静電場のS上での面積分

$$A=\int_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}=\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS,\qquad (\vec{n}：球面 S 上の外向き法線ベクトル)$$

の値に関する以下の(a)〜(f)の記述のうち，正しいものを全て選べ。

(a) $a_2>a_0$の場合 $A=0$である
(b) $a_2<a_0$の場合 $A=0$である
(c) $a_2>a_0$の場合，Aの値はa_2に依らない
(d) $a_2<a_0$の場合，Aの値はa_2に依らない
(e) Aの値は$a_2>a_0$の場合より$a_2<a_0$の場合の方が大きい
(f) Aの値は$a_2<a_0$の場合より$a_2>a_0$の場合の方が大きい

問3．図 1 のように，原点 $\vec{r}=\vec{0}$ を中心とした半径 aの球内に一様に負の電荷が分布している場合を考える。この電荷の電荷密度は，Qを正の数として $\rho=-Q/\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)$ で与えられる。この一様な負の電荷に加えて，球の中心には正の点電荷 q_1が置かれている。このとき，球の内側（$|\vec{r}|<a$）及び外側（$|\vec{r}|>a$）での電場を、ガウスの法則を用いて導出せよ。

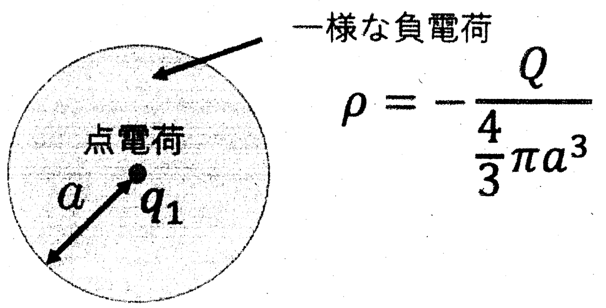


図 1

問４．問３で求めた電場に対する静電ポテンシャル（静電位）$\varphi(\vec{r})$を求めよ。ただし、無限遠での電位をゼロとする。

問５．問３の状況において，図２のように正の点電荷 eが無限遠の遠くから球の表面まで移動したとする。この移動にともなって点電荷 eが得たポテンシャルエネルギーはいくらか。ただし，この点電荷によって，球の電荷分布は変化せず，中心の電荷も動かないものとせよ。

問６．問５において，点電荷 eをさらに球の内部まで移動させたとき，球の内部において，外力をかけずに点電荷が静止した。このとき，q_1と Q はどのような関係を満たしている必要があるか。

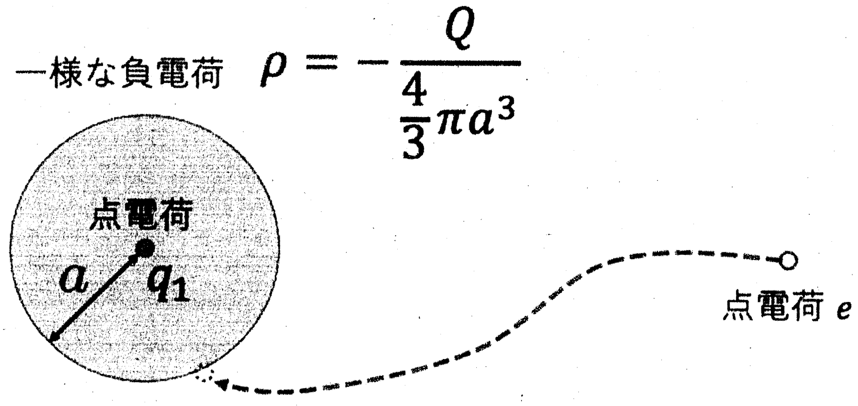


図２