令和6年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　　　【　　理工学群　　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 1	(1) $$\begin{aligned}(E-A)S_n &= (E+A+\cdots+A^{n-1})-(A+A^2+\cdots+A^n)\\ &= E-A^n\\ &= E-PD^nP^{-1}\end{aligned}$$ (2) $\lim_{n\to\infty} A^n$ が零行列 O となるためには，$\lim_{n\to\infty} D^n = O$ が成り立つ必要がある．また，行列 D は行列 A の固有値 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ を対角成分に持つ対角行列であり，行列 D^n の対角成分は $\lambda_1^n,\cdots,\lambda_m^n$ ．したがって，$\lim_{n\to\infty} S_n$ が収束する条件は，$\lvert\lambda_i\rvert < 1, i=1,\cdots,m$ である．また，収束するとき，(1) より， $$\lim_{n\to\infty} S_n = (E-A)^{-1}.$$ (3) 与えられた式を変形すると，$\mathbf{x}=(E-A)^{-1}\mathbf{d}$ である．また，題意より， $$\mathbf{x}=(E-A)^{-1}\mathbf{d}\geq\mathbf{0}$$ である条件を示せばよい．(2) より， $$\mathbf{x}=(E-A)^{-1}\mathbf{d}=(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}+\cdots)\mathbf{d}\geq\mathbf{0}$$ が成り立つ．従って，解 $\mathbf{x}$ が非負であるためには，$(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}+\cdots)$ が非負行列であればよい．そうなるための条件としては，行列 A が非負行列であることが挙げられる．

令和6年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　　　【　　理工学群　　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 2	(1) $F(x^2) = 2x^2,\ F(x) = x,\ F(1) = 0$ なので， $F(ax^2 + bx + c) = aF(x^2) + bF(x) + cF(1) = 2ax^2 + bx$ ただし，a, b, c は任意の実数である． (2) ${}^t[2a\ b\ 0] = A\ {}^t[a\ b\ c]$ なので， $$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (3) 写像 F の像空間の次元は，その表現行列 A のランクに一致するので，rank $A = 2$．一方，次元定理より， $\dim(\mathrm{Ker}\ F) = \dim\ (\mathbb{R}[x]_2) - \mathrm{rank}\ A = 3 - 2 = 1$．

令和6年度

試験名:学群編入学試験　　　　　　【　　理工学群　　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 3	(1) $$R_m(f)=\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i}e^{\frac{(i+j)}{m}}=\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i}Z^{i+j}=\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\frac{Z^{i+1}(Z^{m-i}-1)}{Z-1}$$ $$=\frac{1}{m^2(Z-1)}\left(mZ^{m+1}-\frac{Z^2(Z^m-1)}{Z-1}\right)$$ $$=\frac{Z^{m+1}}{m(Z-1)}-\frac{Z^2(Z^m-1)}{m^2(Z-1)^2}$$ (2) $\iint_E f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{m\to\infty}R_m(f)$ である．$R_m(f)$ の第一項，第二項の極限は，それぞれ， $$\lim_{m\to\infty}\frac{e^{\left(1+\frac{1}{m}\right)}}{m\left(e^{\left(\frac{1}{m}\right)}-1\right)}=\frac{\lim_{m\to\infty}e^{\left(1+\frac{1}{m}\right)}}{\lim_{m\to\infty}m\left(e^{\left(\frac{1}{m}\right)}-1\right)}=e,$$ $$\lim_{m\to\infty}-\frac{e^{\left(\frac{2}{m}\right)}(e-1)}{m^2\left(e^{\left(\frac{1}{m}\right)}-1\right)^2}=-\frac{\lim_{m\to\infty}e^{\left(\frac{2}{m}\right)}(e-1)}{\lim_{m\to\infty}m^2\left(e^{\left(\frac{1}{m}\right)}-1\right)^2}=-(e-1).$$ したがって，$\lim_{m\to\infty}R_m(f)=e-(e-1)=1.$ (3) $$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}e^{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^1[e^{x+y}]_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x$$ $$=\int_0^1(e-e^x)\mathrm{d}x=[xe-e^x]_{x=0}^{x=1}=1$$

令和6年度

試験名:学群編入学試験　　【　理工学群　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 4	(1) 連立方程式 $$f_x(x,y) = 2y(x-2)(y+4) = 0$$ $$f_y(x,y) = 2x(x-4)(y+2) = 0$$ を解いて，$(x,y) = (0,0),(0,-4),(2,-2),(4,0),(4,-4)$. これらはすべて D の内部にある．これらの点において $f(0,0) = f(0,-4) = f(4,0) = f(4,-4) = 0$，$f(2,-2) = 16$. (2) $H(x,y) = xy(x-4)(y+4) - \lambda(x^2-4x+y^2+4y-10)$ とおいて，連立方程式 $$H_x(x,y) = 2y(x-2)(y+4) - 2\lambda(x-2) = 0$$ $$H_y(x,y) = 2x(x-4)(y+2) - 2\lambda(y+2) = 0$$ $$-H_\lambda(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 4y - 10 = 0$$ を解いて，$(x,y) = (5,1),(5,-5),(-1,1),(-1,-5),(2,\pm 3\sqrt{2}-2),(2\pm 3\sqrt{2},-2)$. これらの点における値は $f(5,1) = f(5,-5) = f(-1,1) = f(-1,-5) = 25$，$f(2,\pm 3\sqrt{2}-2) = f(2\pm 3\sqrt{2},-2) = -56$. (3) $f(x,y)$ は $(5,1),(5,-5),(-1,1),(-1,-5)$ で最大値 25，$(2,\pm 3\sqrt{2}-2),(2\pm 3\sqrt{2},-2)$ で最小値 -56 をとる．

令和6年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　【　理工学群　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 5	(1) $s_A^2 = 56.5, s_B^2 = 12.$ (2) 自由度9の χ^2 分布において，右側裾野の確率が α となる点を χ_α^2 と表すことにすれば $$\frac{9s_A^2}{\chi_{0.025}^2} = \frac{9 \times 56.5}{19.023} = 26.73\ldots$$ $$\frac{9s_A^2}{\chi_{0.975}^2} = \frac{9 \times 56.5}{2.7} = 188.33\ldots$$ となる．よって信頼区間は $[26.7, 188.3]$ である． (3) 帰無仮説と対立仮説はそれぞれ $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$，$H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ となる．付表3より自由度 $(9, 7)$ の F 分布において右側裾野の確率が 0.025 となる点は $F_{0.025}(9, 7) = 4.823$ である．$\frac{s_B^2}{s_A^2} < F_{0.025}(9, 7)$ となるならば帰無仮説は棄却されない． 　実際，問 (1) より A 県と B 県の標本分散はそれぞれ $s_A^2 = 56.5, s_B^2 = 12$ であることから，$\frac{s_B^2}{s_A^2} = \frac{56.5}{12} = 4.70\ldots$ となる．よって帰無仮説は棄却されない．

令和6年度

試験名:学群編入学試験　　　　　　　　　【　　理工学群　　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 6	(1) $Cov(X_1, X_2) = E[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]$ (2) 期待値の線形性より， $E(R) = E(a_1X_1 + a_2X_2) = a_1m_1 + a_2m_2$ 分散の定義に従って計算する． $V(R) = V(a_1X_1 + a_2X_2) = E\left[\left((a_1X_1 + a_2X_2) - E(R)\right)^2\right]$ $= (a_1\sigma_1)^2 + (a_2\sigma_2)^2 + 2a_1a_2\sigma_{12}$ (3) $\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = -1$ のとき， $V(R) = (a_1\sigma_1)^2 + (a_2\sigma_2)^2 - 2a_1a_2\sigma_1\sigma_2 = \{(a_1\sigma_1) - (a_2\sigma_2)\}^2$ したがって，$V(R) = 0$ とするためには，$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ $(a_2 \neq 0)$ とすればよい． (4) $\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = 1$ のとき， $V(R) = (a_1\sigma_1)^2 + (a_2\sigma_2)^2 + 2a_1a_2\sigma_1\sigma_2$ $= \{(a_1\sigma_1) + (a_2\sigma_2)\}^2 = \{a_1(\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2\}^2 \geq \sigma_2^2$ であり，最後の等式は $a_1 = 0$ で成立する．したがって，題意が示された．