令和３年度学群編入学試験

理工学群数学類

学　力　検　査
（専門科目）
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅴの全問題について解答すること。

② 解答用紙は各問題に対して１枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。

③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。

④ 下書き用紙は採点しない。

⑤ 試験時間は 120 分である。

問題 I　$a \in \mathbb{R}$ とする. $\mathbb{R}^4$ の標準内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とする. $\mathbb{R}^4$ の元

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対し, $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を

$$V = \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_i \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \right\}$$

で定める. また

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, 行列 A で定まる線形写像を $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ とする.

(1) A の階数 $\operatorname{rank} A$ を求めよ.

(2) $\dim V = 2$ であるとき, a の値を求めよ.

(3) (2) で求めた a に対して, f の像 $\operatorname{Im} f$ と V の共通部分の基底を 1 組求めよ.

問題 II　U, V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $\dim U > \dim V$ とする. また, $f\colon U \to V$ を線形写像とする. 以下の問いに答えよ.

(1) f の核 $\operatorname{Ker} f$ は U の部分空間であることを示せ.

(2) f が単射であることは $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}_U\}$ と同値であることを示せ. ここで, $\mathbf{0}_U$ は U のゼロベクトルである.

(3) 線形写像 $g\colon V \to U$ であって, 合成写像 $g \circ f$ が同型写像になるものは存在しないことを示せ.

(4) 線形写像 $g\colon V \to U$ であって, 合成写像 $f \circ g$ が同型写像になるものが存在することと, f が全射であることが同値であることを示せ.

問題 III

(1) $z = f(x, y)$ は xy 平面上で定義された C^2 級関数とする．変数 u, v に対して，$x = u + v$, $y = uv$ のとき，以下の等式を示せ．

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = (x^2 - 4y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial y}$$

(2) 関数 $g(x, y) = x^4 + y^4 - 2xy^2$ の xy 平面における極値をすべて求めよ．

問題 IV

(1) 以下の広義積分の値を求めよ．

$$\int_0^\pi \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$$

(2) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[0, 1]$ で連続であり，$f(x) > 0$ $(x \in [0, 1])$ とする．このとき，以下の広義積分が収束することを示せ．

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)f(x)}}\,dx$$

問題 V　集合 X の部分集合 A, B に対し

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

とおく．ここで，$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ である．

(1) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ を示せ．

(2) $A \triangle B = \emptyset$ と $A = B$ は同値であることを示せ．

(3) $C \subset X$ とする．$A \triangle B = C$ ならば $A = B \triangle C$ を示せ．

(4) $A_i \subset X$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $B_j \subset X$ $(j = 1, 2, \ldots, \ell)$ に対し

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \triangle \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} B_j\right) \subset \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{\ell}(A_i \triangle B_j)$$

を示せ．