令和６年度学群編入学試験

理工学群数学類

学　力　検　査
（専門科目）
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅲの全問題について解答すること。
② 解答用紙は各問題に対して１枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。
③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。
④ 下書き用紙は回収しない。
⑤ 試験時間は 120 分です。

問題 I

$$V = \{f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C},\ 複素線形写像\}$$

とする．V の元 f, g の和 $f+g$，および複素数 α に関するスカラー倍 αf を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (x \in \mathbb{C}^n)$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の基底とする．$i = 1, \ldots, n$ に対し，$\hat{e}_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を

$$\hat{e}_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = x_i \quad (x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C})$$

で定める．

A を対角化可能な n 次複素正方行列とし，写像 $T : V \to V$ を

$$(T(f))(x) = f(Ax) \quad (f \in V, x \in \mathbb{C}^n)$$

で定める．

(1) $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n$ は V の基底であることを示せ．

(2) T は複素線形写像であることを示せ．

(3) 次を満たす V の基底 $f_1, \ldots, f_n$ が存在することを示せ．

T の $f_1, \ldots, f_n$ に関する表現行列 B が対角行列である

(4) B を (3) の対角行列とする．$B = P^{-1}AP$ を満たす n 次複素正則行列 P が存在することを示せ．

問題 II　$a>0$ とする．自然数 n に対し，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{1}{t^2+x^2+a^2}\,dt$$

と定める．

(1) $f_n(x)$ を求めよ．

(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ 上 $\dfrac{\pi}{2\sqrt{x^2+a^2}}$ に一様収束することを示せ．

(3) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0\leq x\leq 1, y>x\}$ とする．このとき広義積分

$$\iint_D \frac{y}{y^2+a^2}\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\,dxdy$$

は収束することを示し，その値を求めよ．

問題 III　集合 X に対し，X のべき集合を $P(X)$ と表す．写像 $f:X\to Y$ に対し，写像 $\hat{f}:P(X)\to P(Y)$ を

$$\hat{f}(A)=\{y\in Y\,|\,f^{-1}(\{y\})\subset A\}\quad (A\in P(X))$$

で定める．

(1) f が単射であることと $\hat{f}$ が単射であることは同値であることを示せ．

(2) f が全射であることと $\hat{f}$ が全射であることは同値であることを示せ．

(3) f は全射であるとする．このとき，$B\in P(Y)$ に対し，

$$f^{-1}(B)=\bigcap\{A\subset X\,|\,\hat{f}(A)=B\}$$

を示せ．

(4) f は全射であるとする．X 上に同値関係 $\sim$ を

$$x\sim y \Longleftrightarrow f(x)=f(y)\quad (x,y\in X)$$

と定め，$x\in X$ の同値類を $[x]$ とかく．$p:X\to X/\sim$ を自然な射影とし，$\varphi:X/\sim\to Y$ を $\varphi([x])=f(x)$　($[x]\in X/\sim$) と定めるとき，$\hat{\varphi}\circ\hat{p}=\hat{f}$ を示せ．