令和４年度学群編入学試験

理工学群数学類

学　力　検　査
(専門科目)
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅲの全問題について解答すること。
② 解答用紙は各問題に対して１枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。
③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。
④ 下書き用紙は採点しない。
⑤ 試験時間は120分である。

問題 I　複素数列 $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ を (a_n) と表す．$V = \{(a_n) \mid a_n \in \mathbb{C}\,(n = 0, 1, 2, \dots)\}$ とする．数列の和とスカラー倍を

$$
\begin{aligned}
(a_n) + (b_n) &= (a_n + b_n) \\
\lambda(a_n) &= (\lambda a_n) \quad (\lambda \in \mathbb{C})
\end{aligned}
$$

で定めることにより V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とみなす．$\beta \in \mathbb{C}$ とし，

$$
W = \{(a_n) \in V \mid a_{n+3} = a_n + \beta a_{n+1} - \beta a_{n+2}\ (n = 0, 1, 2, \dots)\}
$$

とする．また W の元 (x_n)，(y_n)，(z_n) をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
x_0 = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \\
y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 0 \\
z_0 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 1
\end{aligned}
$$

を満たすように選ぶ．以下の問いに答えよ．

(1) W が V の部分空間になることを示せ．

(2) (x_n)，(y_n)，(z_n) が W の基底になることを示せ．

(3) $F\colon W \to W$ を

$$
F((a_n)) = (b_n), \quad b_n = a_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)
$$

で定める．F が線形写像であることを示せ．

(4) W の基底 (x_n)，(y_n)，(z_n) に関する F の表現行列 A を求めよ．

(5) A が対角化可能でないような $\beta \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ．

(6) $\beta = -1$ のとき $P^{-1}AP = B$ となる正則行列 P と対角行列 B を 1 組求めよ．

問題 II　$F(x,y) = xy\tan y + \pi\tan y - x$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\tan x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0)$ を満たす実数 a_0，a_1，a_2，a_3 を求めよ．ただし $o(\,\cdot\,)$ はランダウの記号（スモール・オー）を表す．

(2) 1 以上の整数 n に対し，開区間 $\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ を I_n とおく．各 I_n における方程式

$$\tan x = \frac{1}{x} \quad (x \in I_n)$$

の解を x_n とする．$d_n = x_n - n\pi$ とおくとき $F\left(\frac{1}{n}, d_n\right) = 0$ を示せ．

(3) $x = 0$ を含む開区間 I と，I において定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ であって

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in I), \quad \varphi(0) = 0$$

を満たすものが存在することを示せ．

(4) (2) の x_n を

$$x_n = n\pi + b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} + b_3\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (n \to \infty)$$

と表示したときの実数 b_1，b_2，b_3 を求めよ．

問題 III　X を集合とし，f，g，h を X から X への写像とする．以下の問いに答えよ．

(1) f と g が全単射ならば，合成写像 $g \circ f$ は全単射であることを示せ．

(2) $g \circ f$ が全単射ならば，f は単射かつ g は全射であることを示せ．さらに，この命題の逆が成り立たないことを示す反例を 1 つ与え，それが反例であることを示せ．

(3) $f \circ g \circ h$ と $h \circ g \circ f$ が全単射ならば，f，g，h はすべて全単射であることを示せ．