令和３年度応用理工学類編入学試験
学力検査問題

令和２年９月５日(土)　１０：００～１２：３０

注意事項

1） この冊子には，数学1，数学2，物理学1，物理学2，化学1，化学2の計6題の問題がある。「物理学1，物理学2，化学1，化学2」の中から2題を選択し，数学1，数学2と合わせて計4題を解答すること。下記の表も参照すること。

問題	解答用紙の種類	解答用紙の枚数	備考
数学1	罫線あり	1枚	必須
数学2	罫線あり	1枚	
物理学1	罫線あり	1枚	この中から2題選択
物理学2	罫線あり	1枚	
化学1	罫線あり	1枚	
化学2	罫線あり	1枚	

2） 解答用紙の所定欄に学群，学類，氏名，及び受験番号を記入すること。

3） すべての解答用紙の氏名欄の下の1行の欄に解答する問題名，すなわち，「数学1」，「数学2」，「物理学1」，「物理学2」，「化学1」，「化学2」のいずれかを明記すること。必要なら，解答用紙の裏も解答に用いてよい。

4） 机の上には「受験票」，「鉛筆」，「消しゴム」，「鉛筆削り」，「時計(計時機能だけのもの)」，「眼鏡」以外のものを置かないこと。

数学１　試験問題

以下の問いに答えよ。

(1) 次の関数$f(x)$の$x=0$における微分可能性を調べよ（aは定数）。ただし，逆三角関数は主値をとるものとする。

$$f(x)=\begin{cases} a|x|-x\tan^{-1}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

(2) $\mathbb{R}^2$で定義された関数$f(x,y)=(2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$を考える。

(a) 点(1，−1)において，$f(x,y)$の変化率（方向微分）が最大となる方向，およびその最大値を求めよ。

(b) $f(x,y)$の極値を求めよ。

(c) $x^2+y^2\geq 1$において，不等式　$0<f(x,y)\leq\dfrac{2}{e}$　が成り立つことを示せ。

(d) $\mathbb{R}^2$における$f(x,y)$の最大値，最小値を求めよ。

(3) 二重積分　$I_n=\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}dxdy\ (n=1,2,3,\dots)$　は存在するか。存在する場合は，その値をnを用いて表わせ。存在しない場合は，「存在しない」と答えること。

数学 2　試験問題

3 次行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

を考える。なお，以下で I は 3 次の単位行列とする。

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。なお，各固有ベクトルは，その成分が簡単な整数となるようにすること。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるように，正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を定めよ。なお，P はその要素が簡単な整数となるようにすること。

(3) 行列 A^3 を

$$A^3 = xA^2 + yA + zI$$

のように A^2, A, I の線形結合で表したときの線形結合係数 x, y, z を定めよ。
（設問(2)で求めた行列 P, P^{-1} を用いると $P^{-1}A^3P$ や $P^{-1}A^2P$ も対角行列となること，および A の固有値はどれも A の固有方程式を満たすことを利用するとよい。）

(4) 係数 α, β, γ を任意に選んで

$$C = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I$$

で与えられる 3 次行列 C を考えるとき，$C' = AC$ で定義される行列 C' も，ある係数 α', β', γ' を用いて

$$C' = \alpha' A^2 + \beta' A + \gamma' I$$

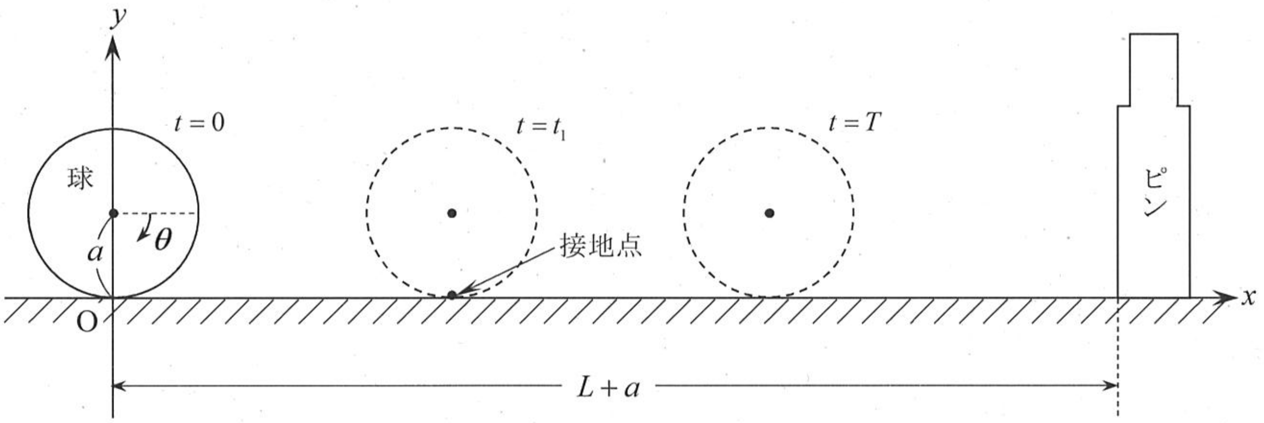
と表され，それらの係数の間には必ず

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

の関係がある。3 次行列 M を定め，その固有値を求めよ。

物理学 1 試験問題

図に示すように，水平なレーン（床）上に，半径a，質量mの一様な剛体球とみなせるボウリングの球，およびピンを考える。ボウリングの球に初期条件を与え，レーン上を運動させ，ピンまで到達させるとして，下記の設問に答えよ。ただし，紙面奥行き方向の運動は考えなくてよいものとし，球の回転軸は紙面に垂直とする。また，レーンに沿った方向にx軸，それと垂直な方向にy軸をとり，球の回転角θの正の向きを水平方向から時計回りにとる。さらに，原点Oからピンまでのx軸方向距離を$L+a$，ボウリングの球とレーンとの間の動摩擦係数をμ'，重力加速度をgとし，球の転がり抵抗（転がり摩擦）は無視してよいものとする。



まず，時刻$t=0$において，ボウリングの球に，重心位置$(x_G, y_G)=(0, a)$，重心速度$(\dot{x}_G, \dot{y}_G)=(v_1, 0)$，回転角$\theta=0$，および角速度$\dot{\theta}=\omega_1$の初期条件を与えたところ（$v_1>0$，$\omega_1>0$），球はレーンの上を滑らずに転がり，やがてピンに接触した。

(1) はじめに，ボウリングの球の慣性モーメントを求める。ボウリングの球を薄い円板の集合と考えることで，ボウリングの球の重心を通る軸まわりの慣性モーメントを導出せよ（導出過程を明示すること）。

(2) 任意の時刻$t=t_1$におけるボウリングの球の接地点の速度を示せ。ただし，t_1は球がピンに接触する前の時刻とする。

(3) ボウリングの球がピンに接触する時刻を求めよ。

次に，同じボウリングの球に，時刻$t=0$において，$(x_G, y_G)=(0, a)$，$(\dot{x}_G, \dot{y}_G)=(v_2, 0)$，$\theta=0$，および$\dot{\theta}=\omega_2$の初期条件を与えたところ（$v_2>0$，$\omega_2>0$，$v_2>a\omega_2$），球がレーンの上を$x$軸正方向に滑りながら転がった。その後，球は時刻$t=T$において滑らずに転がり始め，やがてピンに接触した。

(4) 滑りながら転がっているときのボウリングの球の運動方程式を，重心の並進運動および球の回転運動に対してそれぞれ立式せよ。

(5) Tをa，μ'，v_2，ω_2，gを用いて表せ。

(6) ボウリングの球がピンに接触する時刻を求めよ。ただし，解答にTを用いてよいものとする。

物理学２　試験問題

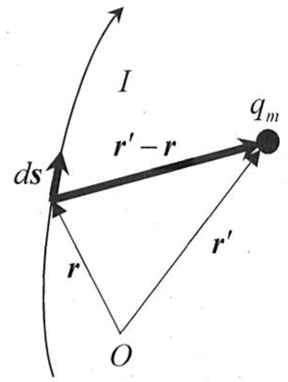


図１

１．図１のように，電流 I が流れる導線が真空中にある。宇宙の初期にはモノポールが存在した可能性が議論されている。仮想的なモノポールである磁荷 q_m を位置 $\boldsymbol{r}'$ に置く。その磁荷 q_m が導線上の位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は，クーロンの法則より $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\dfrac{q_m}{4\pi\mu_0}\dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}$ で与えられる。ここで，μ_0 は真空の透磁率であり，磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ となる。

(1) 磁荷 q_m がもたらす磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が導線上の位置 $\boldsymbol{r}$ にある電流素片 $Id\boldsymbol{s}$ に作用するローレンツ力 $d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を，$I, d\boldsymbol{s}, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を用いて表せ。

(2) その際，電流素片は磁荷に対して上記のローレンツ力と大きさが同じで反対方向の力を作用させる。電流素片 $Id\boldsymbol{s}$ が作る磁束密度 $d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')$ から磁荷 q_m が受ける力 $d\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}')$ は $d\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}')=\dfrac{q_m d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')}{\mu_0}$ となる。これらのことから，位置 $\boldsymbol{r}$ にある大きさ I の電流が流れる電流素片 $Id\boldsymbol{s}$ が位置 $\boldsymbol{r}'$ に作る磁束密度は，$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}d\boldsymbol{s}\times\dfrac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^2}$（ビオ・サバールの法則）となることを示せ。

（次ページに続く）

2．導線を円筒面上に規則的に巻いたものをソレノイドという。図２は真空中に置かれたソレノイドの断面である。単位長さあたりの導線の巻き数n，半径R，長さLのソレノイドに大きさIの電流を流す。ソレノイド左端の中心を座標の原点とする。

(1) ソレノイドのzの位置の微小区間dzの部分の導線の円電流が，z軸上の点z_0に発生させる磁束密度dBの大きさと向きを，ビオ・サバールの法則を用いて導け。

(2) (1)で求めたdBを$z=0$から$z=L$まで積分することでz軸上の点z_0での磁束密度Bの大きさを求めよ。必要であれば，$\int \frac{1}{\left(x^2+c\right)^{3/2}}dx = \frac{x}{c\sqrt{x^2+c}}$（$c$は正定数）の関係を用いてもよい。

以下では，$L \gg R$の場合を考える。

(3) (2)の結果を用いて，z軸上の点$z_0 = \frac{L}{2}$での磁束密度Bの大きさを求めよ。

(4) また，図２の$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$の経路について，アンペールの法則を適用することにより，ソレノイドの外部の磁束密度がゼロとみなせることを説明せよ。

(5) ソレノイドの端のz軸上の点$z=0$での磁束密度Bの大きさを求めよ。

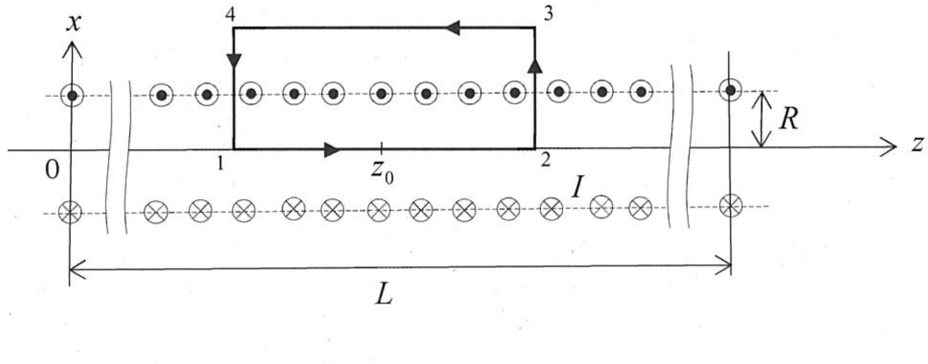


図２

化学1 試験問題

1. 単原子理想気体に関する以下の問いに答えよ。ただし気体定数 R の値を $8.31\ \mathrm{J\ K^{-1}\ mol^{-1}}$ とする。

(1) 2.00 mol の単原子理想気体の定容熱容量 C_V を有効数字2桁で答えよ。

(2) 2.00 mol の単原子理想気体の定圧熱容量 C_p を有効数字2桁で答えよ。

(3) 定容過程で 2.00 mol の単原子理想気体の温度を 300 K から 400 K まで上昇させる。このときの気体の内部エネルギー変化 ΔU を有効数字2桁で答えよ。

(4) 定圧過程で 2.00 mol の単原子理想気体の温度を 300 K から 400 K まで上昇させる。このとき，外部から与える熱量 q を有効数字2桁で答えよ。

(5) 断熱過程で 300 K，1.00 mol，25.0 $\mathrm{dm^3}$ の単原子理想気体を 12.5 $\mathrm{dm^3}$ まで圧縮する。圧縮後の気体の温度 T を有効数字2桁で答えよ。必要であれば $2^{2/3} = 1.59$ を用いよ。

2. 気体分子の解離平衡に関する以下の問いに答えよ。

(1) ある気体分子ABが次の反応式で表される解離平衡状態にあるとする。

$$\mathrm{AB} \rightleftarrows \mathrm{A} + \mathrm{B}$$

平衡状態における全圧を p，気体分子ABの解離度を α とする。このときの A，B，AB それぞれの分圧 p_{A}，p_{B}，p_{AB} を p，α を用いて表せ。

(2) (1) の平衡状態における圧平衡定数 K_p を p，α を用いて表せ。

（次ページに続く）

3. アセトアルデヒド（CH_3CHO）を加熱すると，次の反応に従い熱分解を起こし，メタン（CH_4）と一酸化炭素（CO）を生成する。

$$CH_3CHO \rightarrow CH_4 + CO$$

この反応は，次の素反応 (a) – (c) を経て進行する。

$$CH_3CHO \overset{k_a}{\rightarrow} \cdot CH_3 + \cdot CHO \qquad (a)$$

$$\cdot CH_3 + CH_3CHO \overset{k_b}{\rightarrow} CH_4 + CH_3CO\cdot \qquad (b)$$

$$CH_3CO\cdot \overset{k_c}{\rightarrow} \cdot CH_3 + CO \qquad (c)$$

また，次の素反応 (d) を経て，少量のエタン（C_2H_6）が副生成物として生成する。

$$\cdot CH_3 + \cdot CH_3 \overset{k_d}{\rightarrow} C_2H_6 \qquad (d)$$

ここで k_a，k_b，k_c，k_d は各素反応の速度定数とする。ただし，・CHOの分解反応は無視するものとする。また，CH_3CHO，・CH_3，CH_3CO・ の濃度をそれぞれ $[CH_3CHO]$，$[\cdot CH_3]$，$[CH_3CO\cdot]$ と表す。以下の問いに答えよ。

(1) CH_3CO・の生成速度 v_1 を k_b，$[\cdot CH_3]$，$[CH_3CHO]$ を用いて表せ。

(2) CH_3CO・の消失速度 v_2 を k_c，$[CH_3CO\cdot]$ を用いて表せ。

(3) ・CH_3の生成速度 v_3 を k_a，k_c，$[CH_3CHO]$，$[CH_3CO\cdot]$ を用いて表せ。

(4) ・CH_3の消失速度 v_4 を k_b，k_d，$[\cdot CH_3]$，$[CH_3CHO]$ を用いて表せ。

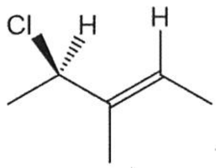
(5) この熱分解反応の定常状態では，反応中間体の生成速度と消失速度が一致すると近似できる。このとき，$[\cdot CH_3]$ を k_a，k_d，$[CH_3CHO]$ を用いて表せ。

(6) (5)の近似において，COの生成速度 v_5 が $[CH_3CHO]$ の何乗に比例するか答えよ。

化学 2 試験問題

1. 次の問いに答えよ。

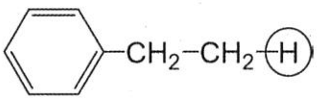
(1) 次の化合物のIUPAC名を答えよ。



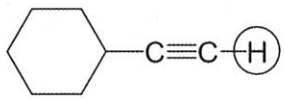
(2) 2-エチルブタン酸メチルの構造式を示せ。

(3) 次の2つの化合物のうち，○で囲った水素の酸性度が高いのはどちらか，記号で答えよ。また，その理由を説明せよ。

(a)

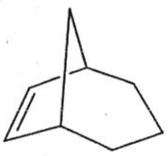


(b)

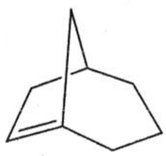


(4) 同じ分子式 C_8H_{12} をもつ次の2つの化合物のうち，室温で安定に存在しないのはどちらか，記号で答えよ。また，その理由を説明せよ。

(a)



(b)



2. アルケンと臭化水素の反応について，次の問いに答えよ。

(1) 1-ブテン（$CH_2{=}CH{-}CH_2CH_3$）と臭化水素の反応で得られる主生成物を答えよ。また，その主生成物が得られる反応機構を巻き矢印表記法を用いて説明せよ。

(2) 1-ブテン（$CH_2{=}CH{-}CH_2CH_3$）1 mol とメトキシエテン（$CH_2{=}CH{-}OCH_3$）1 mol の混合物に臭化水素 1 mol を反応させた場合，どのような反応が進行するか，以下の選択肢から選んで記号で答えよ。また，その理由を説明せよ。

(a) ほぼ 1-ブテンのみが消費される。

(b) ほぼメトキシエテンのみが消費される。

(c) 1-ブテン 0.5 mol とメトキシエテン 0.5 mol が消費される。

(d) 実験するたびに 1-ブテンとメトキシエテンの消費割合が変化する。

（次ページに続く）

3. 次の反応の主生成物（有機化合物）A～Hの構造式を示せ。必要ならば，立体化学が分かるように示せ。