令和3年度
学群編入学試験　　　　　　　　　　　　【 理工学群 工学システム学類 】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
数学 1	［出題意図］ 解析学の基本事項に関する理解度，及び計算力を試す． (1) $\lim_{h\to\pm0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to\pm0}\left(a\frac{\|h\|}{h}-\tan^{-1}\frac{1}{h}\right)=\pm a\mp\frac{\pi}{2}$（複号同順）．したがって，$a-\frac{\pi}{2}=-a+\frac{\pi}{2}$ すなわち $a=\frac{\pi}{2}$ のとき微分可能． このとき以外は，$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ が存在しないことから， $a\neq\frac{\pi}{2}$ のとき微分可能ではない． (2) $f_x(x,y)=2x\left(2-2x^2-y^2\right)e^{-x^2-y^2}$, $f_y(x,y)=2y\left(1-2x^2-y^2\right)e^{-x^2-y^2}$, $f_{xx}(x,y)=2\left(2-10x^2-y^2+4x^4+2x^2y^2\right)e^{-x^2-y^2}$, $f_{yy}(x,y)=2\left(1-2x^2-5y^2+2y^4+4x^2y^2\right)e^{-x^2-y^2}$, $f_{xy}(x,y)=-4xy\left(3-2x^2-y^2\right)e^{-x^2-y^2}$. (a) 点 $(1,-1)$ の (λ,μ) 方向 $(\lambda^2+\mu^2=1)$ の方向微分係数 $\lambda f_x(1,-1)+\mu f_y(1,-1)$ は，(λ,μ) が $(f_x(1,-1),f_y(1,-1))$ と同じ方向を向くとき最大．（あるいは，変化率が最大となるのは点 $(1,-1)$ における勾配ベクトルの方向．）$f_x(1,-1)=-\frac{2}{e^2}$, $f_y(1,-1)=\frac{4}{e^2}$ より，最大となる方向は $\left(-\frac{2}{e^2},\frac{4}{e^2}\right)$（※）で，最大値は $\sqrt{\left(-\frac{2}{e^2}\right)^2+\left(\frac{4}{e^2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{e^2}$. （※）正の定数倍でもよい． (b) $f_x(x,y)=0$ より $x=0$ または $2x^2+y^2=2$, $f_y(x,y)=0$ より $y=0$ または $2x^2+y^2=1$. これらをみたすのは， $x=y=0$　　または $x=0$ かつ $2x^2+y^2=1$ このとき $y=\pm1$　　または $y=0$ かつ $2x^2+y^2=2$ このとき $x=\pm1$. したがって，停留点は $(x,y)=(0,0),(\pm1,0),(0,\pm1)$.

$(x,y)=(0,0)$ のとき, $f_{xx}=4$, $f_{yy}=2$, $f_{xy}=0$ より $\Delta=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=8>0$, $f_{xx}>0$, したがって, この点で極小.

$(x,y)=(\pm1,0)$ のとき, $f_{xx}=-\dfrac{8}{e}$, $f_{yy}=-\dfrac{2}{e}$, $f_{xy}=0$ より $\Delta=\dfrac{16}{e^2}>0$, $f_{xx}<0$, したがって, これらの点で極大.

$(x,y)=(0,\pm1)$ のとき, $f_{xx}=\dfrac{2}{e}$, $f_{yy}=-\dfrac{4}{e}$, $f_{xy}=0$ より $\Delta=-\dfrac{8}{e^2}<0$, したがって, これらの点では極大でも極小でもない.

以上より, $f(x,y)$ は極大値 $f(\pm1,0)=\dfrac{2}{e}$, 極小値 $f(0,0)=0$ をもつ.

(c) $f(x,y)>0$ は明らか. $x^2+y^2\geq1$ のとき, $f(x,y)\leq2(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$. 関数 $g(r)=2re^{-r}$ の $r\geq1$ におけるふるまいを調べると, $g'(r)=2(1-r)e^{-r}<0$ $(r>1)$ より $g(1)=\dfrac{2}{e}$ で最大で, $r>1$ で減少する. したがって, $f(x,y)\leq\dfrac{2}{e}$. 以上より, 与えられた不等式が成り立つ.

(d) (b),(c) より, 最大値は $f(\pm1,0)=\dfrac{2}{e}$, 最小値は $f(0,0)=0$.

(3) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とおくと,

$$I_n=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{r}{(1+r^2)^n}\,drd\theta=2\pi\cdot\lim_{R\to\infty}J_n,$$
$$J_n=\int_0^R\frac{r}{(1+r^2)^n}\,dr.$$

$n=1$ のとき,

$$J_1=\int_0^R\frac{r}{1+r^2}\,dr=\left[\frac{1}{2}\log\left(1+r^2\right)\right]_0^R$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(1+R^2\right)\longrightarrow\infty\quad(R\to\infty).$$

$n\geq2$ のとき,

$$J_n=\int_0^R\frac{r}{(1+r^2)^n}\,dr=\left[\frac{1}{2(1-n)}\cdot\frac{1}{(1+r^2)^{n-1}}\right]_0^R$$
$$=\frac{1}{2(1-n)}\left\{\frac{1}{(1+R^2)^{n-1}}-1\right\}\longrightarrow\frac{1}{2(n-1)}\quad(R\to\infty).$$

したがって, $n=1$ のとき存在しない, $n\geq2$ のとき $I_n=\dfrac{\pi}{n-1}$.

令和3年度
学群編入学試験　　　　　　　　　　　　【 理工学群　工学システム学類 】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
数学2	[出題意図] 線形代数の中核となる逆行列や対角化について、その計算が確実に出来ること，および対角化の意味の確かな理解に基づいて柔軟な応用が出来ることを確認する。

[解答例]

(1) 上三角行列なので固有値は対角成分。$\lambda_1=1, \lambda_2=4, \lambda_3=6$ とすれば対応する固有ベクトルは $\vec{w}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{w}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \vec{w}_3=\begin{pmatrix}16\\25\\10\end{pmatrix}$ と求まる。

(2) P は固有ベクトルを並べればよい。逆行列はクラメルの公式を使えばよい。

$$P=\begin{pmatrix}1&2&16\\0&3&25\\0&0&10\end{pmatrix}, P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2/3&1/15\\0&1/3&-5/6\\0&0&1/10\end{pmatrix}$$

(3) 固有値はどれも A の固有方程式を満たすので、対角化して対角成分を考えれば

$$(P^{-1}AP)^3-11(P^{-1}AP)^2+34(P^{-1}AP)-24I$$
$$=P^{-1}(A^3-11A^2+34A-24I)P=0$$

ここで P は正則なので $A^3-11A^2+34A-24I=0$ つまり

$$A^3=11A^2-34A+24I$$

が成り立ち，3次の関係式はこれに限る。よって $x=11, y=-34, z=24$。

(4) 前問から，変換 $C\to AC$ は $I\to A,\ A\to A^2,\ A^2\to A^3=11A^2-34A+24I$ を引き起こすので，$M=\begin{pmatrix}11&1&0\\-34&0&1\\24&0&0\end{pmatrix}$ で表される。その固有方程式

$\lambda^3-11\lambda^2+34\lambda-24=0$ は A の固有方程式と同じなので，固有値も A と同じく $1,4,6$。

令和3年度
学群編入学試験

【 理工学群　工学システム学類 】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
物理学1	

［出題意図］

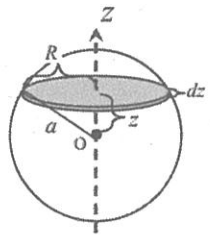
初等力学において最も重要な内容の一つである剛体の平面運動に関する問題であり，慣性モーメント，運動方程式等への理解を問うとともに，それらを用いて解を求めることができるか調査する．これにより，応用理工学類・工学システム学類の力学系科目に対応できる能力を有するかを調べる．

［解答例］

(1) はじめに，ボーリングの球の慣性モーメントを求める．ボーリングの球を薄い円盤の集合と考えることで，ボーリングの球の重心を通る軸まわりの慣性モーメントを導出せよ（導出過程を明示すること）．

薄い円盤の z 軸まわりの慣性モーメント I' は，密度を ρ とすると，

$$I'=\int_0^R r^2\cdot\rho\cdot 2\pi r dr dz=2\pi\rho dz\int_0^R r^3 dr=\frac{\pi\rho R^4}{2}dz=\frac{\pi\rho}{2}(a^2-z^2)^2 dz$$



よって，球の慣性モーメント I は，

$$I=2\int_0^a \frac{\pi\rho}{2}\left(a^2-z^2\right)^2 dz=\frac{8}{15}\pi\rho a^5$$

ここで，$m=4\pi\rho a^3/3$ であるから，

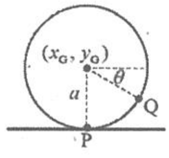
$$\boxed{I=\frac{2}{5}ma^2}$$

(2) 任意の時刻 $t=t_1$ におけるボーリングの球の接地点の速度を示せ．ただし，t_1 は球がピンに接触する前の時刻とする．

点Pの速度は，x 軸方向，y 軸方向ともに0である（滑らずに転がっている場合，最下点の速度は常に0）．

（解説）

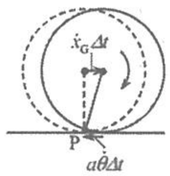
球面上の任意の点Q（右図参照）の座標および速度は，



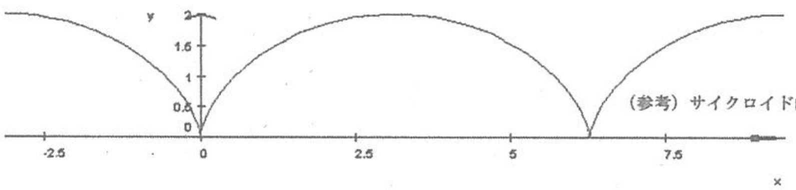
$$\begin{cases}x_Q=x_G+a\cos\theta\\ y_Q=y_G-a\sin\theta\end{cases}\qquad\begin{cases}\dot{x}_Q=\dot{x}_G-a\dot{\theta}\sin\theta\\ \dot{y}_Q=-a\dot{\theta}\cos\theta\end{cases}$$

よって，最下点Pの速度は，

$$\begin{cases}\dot{x}_P=\dot{x}_G-a\dot{\theta}\\ \dot{y}_P=0\end{cases}$$



滑らずに転がる場合，$\dot{x}_G$ と $a\dot{\theta}$ は等しくなるため（右図参照），$\dot{x}_P=0$ となる．
なお，点Pの軌跡であるサイクロイド曲線からも知ることができる．



（参考）サイクロイド曲線

(3) ボーリングの球がピンに接触する時刻を求めよ．

垂直抗力を N として，球の運動方程式を立式すると，

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G = 0 \\ m\ddot{y}_G = N - mg = 0 \end{cases}$$ （重心の並進運動に対して）

$$I\ddot{\theta} = 0$$ （球の回転運動に対して）

すなわち，重心は $(\dot{x}_G, \dot{y}_G) = (v_1, 0)$ の等速直線運動，球は角速度 $\dot{\theta} = \omega_1$ の等角速度運動をする．よって，球がピンに到達する時刻は，

$$\boxed{t = \frac{L}{v_1}}$$

(4) 滑りながら転がっている時のボーリングの球の運動方程式を，重心の並進運動および球の回転運動に対してそれぞれ立式せよ．

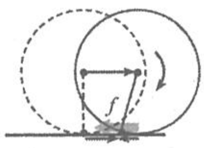
滑りながら転がるため，球に動摩擦力が作用する．それを f とすると，

$$f = \mu' N = \mu' mg$$

であるから，運動方程式は，

$$\begin{cases} m\ddot{x}_G = -f \\ m\ddot{y}_G = N - mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} m\ddot{x}_G = -\mu' mg \\ m\ddot{y}_G = 0 \end{cases}}$$ （重心の並進運動に対して）

$$I\ddot{\theta} = fa \Rightarrow \boxed{\frac{2}{5}ma^2\ddot{\theta} = \mu' mga}$$ （球の回転運動に対して）



(5) T を a，μ'，v_2，ω_2，g を用いて表せ．

運動方程式より，

$$\ddot{x}_G = -\mu' g \Rightarrow \dot{x}_G = -\mu' gt + v_2$$

$$\ddot{\theta} = \frac{5\mu' g}{2a} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{5\mu' g}{2a}t + \omega_2$$

これらより，球の最下点Pの x 軸方向速度は，

$$\dot{x}_P = \dot{x}_G - a\dot{\theta} = -\mu' gt + v_2 - a\left(\frac{5\mu' g}{2a}t + \omega_2\right) = -\frac{7\mu' g}{2}t + v_2 - a\omega_2$$

のように書け，これが0になる時に，滑りながら転がる状態から滑らずに転がる状態に遷移する．その際の t が T であるから，

$$-\frac{7\mu' g}{2}T + v_2 - a\omega_2 = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{2(v_2 - a\omega_2)}{7\mu' g}}$$

(6) ボーリングの球がピンに接触する時刻を求めよ．ただし，解答にTを用いてよいものとする．

求める時刻は，「滑らずに転がり始めるまでの時間（T）」＋「滑らずに転がり始めてからピンに接触するまでの時間」で計算できる．「滑らずに転がり始めるまでの時間（T）」はすでに前問で求めている．一方，「滑らずに転がり始めてからピンに接触するまでの時間」については，滑らずに転がるようになると，動摩擦力が働かなくなり，以降は球の重心のx軸方向速度が一定となることから計算できる．一定速度は，

$$\dot{x}_G = -\mu' g T + v_2$$

また，滑らずに転がり始める際のx_Gは，運動方程式より，

$$x_G = -\frac{\mu' g}{2}T^2 + v_2 T$$

となるから，ピンに接触するまでの残りの距離は，

$$L - \left(-\frac{\mu' g}{2}T^2 + v_2 T\right) = L + \frac{\mu' g}{2}T^2 - v_2 T$$

これらより，

$$\text{「滑らずに転がり始めてからピンに接触するまでの時間」} = \frac{L + \frac{\mu' g}{2}T^2 - v_2 T}{-\mu' g T + v_2} = \frac{2L + \mu' g T^2 - 2v_2 T}{2(-\mu' g T + v_2)}$$

以上より，ボーリングの球がピンに接触する時刻は，

$$\boxed{\begin{aligned} t &= T + \frac{2L + \mu' g T^2 - 2v_2 T}{2(-\mu' g T + v_2)} \\ &= \frac{2L - \mu' g T^2}{2(-\mu' g T + v_2)} \end{aligned}}$$

令和3年度

学群編入学試験　　　　　　　　　　【 理工学群　工学システム学類 】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
物理学 2	出題意図 初等電磁気学で学ぶ法則や電気回路を正しく理解し使えるだけの物理的素養があるかを調べる。また，応用理工学類・工学システム学類に編入学し授業内容を理解できるだけの応用数学の初等的スキルを有するかを調べる。 解答例 1．(1) $d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = I\left(d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\right)$。 (2) 電流素片が磁荷に対して作用する力 $d\boldsymbol{F}'$ は， $d\boldsymbol{F}' = -d\boldsymbol{F} = -I\left(d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')\right) = -\frac{Ids}{4\pi}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert}\frac{q_m}{\lvert\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\rvert^2} = \frac{q_m d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')}{\mu_0}$ となる。したがって，電流素片が $\boldsymbol{r}'$ につくる磁束密度は， $d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}') = \frac{\mu_0 I}{4\pi}d\boldsymbol{s}\times\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{\lvert\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\rvert}\frac{1}{\lvert\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\rvert^2}$ となる。 2．(1) 大きさは，$dB = \frac{\mu_0 IR^2 n}{2\left[(z-z_0)^2+R^2\right]^{3/2}}dz$。向きは z 軸の正方向。 (2) $B = \frac{\mu_0 nI}{2}\left\{\frac{z_0}{\sqrt{z_0{}^2+R^2}} + \frac{L-z_0}{\sqrt{(L-z_0)^2+R^2}}\right\}$ (3) (2) より中心部分の磁束密度は $B = \mu_0 nI$。 (4) 磁束と積分経路の直交性を踏まえてアンペールの法則を $1\rightarrow 2\rightarrow 3\rightarrow 4\rightarrow 1$ の経路に適用すると $B_{12}+B_{34} = \mu_0 nI$ となる。 さらに(3)の結果から $B_{12} = \mu_0 nI$ となるので，$B_{34} = 0$。すなわちソレノイド外部の磁場はゼロと見なすことができる。

（5）（2）より左端$(z=0)$の磁場は$B=\dfrac{\mu_0 nI}{2}$。