令和3年度

試験名：私費外国人留学生入試　　　　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　　分	標 準 的 な 解 答 例 又 は 出 題 意 図
問題1 問1	**【解答】**

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx$

$x=\sqrt{2}sin\theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta}=\sqrt{2}cos\theta$ から $dx=\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$

x	$0\to 1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2-2sin^2\theta}}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2cos^2\theta}}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{|cos\theta|}d\theta$$

ここで、積分区間 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ において、つねに$\cos\theta>0$ なので、

分母は、$|\cos\theta|=\cos\theta$ として、絶対値をはずせるので、

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{cos\theta}{cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\, d\theta$$

$$=[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}2e^{-x}\sin x\cos x\, dx$

2倍角の公式を使って変形し、Iとおく。

$$\int_0^{\pi}2e^{-x}\sin x\cos x\, dx=\frac{2}{2}\int_0^{\pi}e^{-x}\sin 2x\, dx=\int_0^{\pi}e^{-x}\sin 2x\, dx=I$$

部分積分（1回目）を行うと

$$I=[(-e^{-x})\sin 2x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x})\cdot 2\cos 2x\, dx=0+2\int_0^{\pi}e^{-x}\cos 2x\, dx$$

これに、部分積分（2回目）を行うと

$$=2\left\{[(-e^{-x})\cos 2x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-e^{-x})(-2\sin 2x)dx\right\}$$

$$= 2\left\{(-e^{-\pi}+e^{0}) - 2\int_0^{\pi}(e^{-x})\,sin\,2x\,dx\right\} = 2(-e^{-\pi}+1) - 4I$$

つまり

$$I = 2(-e^{-\pi}+1) - 4I$$

$$5I = 2(-e^{-\pi}+1)$$

$$I = \frac{2}{5}(-e^{-\pi}+1)$$

となり、これが求める値となる。

$$(3)\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log(1+x^2)\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)'log(1+x^2)\,dx$$

として、部分積分をすると

$$= \left[-\frac{1}{x}log(1+x^2)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

となる。ここで、第 1 項については

$$\left[-\frac{1}{x}log(1+x^2)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}log(1+3) + \sqrt{3}\,log\left(1+\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}log\,2 + \sqrt{3}\,log\bigl($$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}log\,2 + 2\sqrt{3}\,log\,2 - \sqrt{3}\,log\,3 = \frac{4\sqrt{3}}{3}log\,2 - \sqrt{3}\,log\,3$$

第 2 項については、

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

となり、ここで$x = tan\,\theta$とすると

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{cos^2\theta}$ より、$dx = \frac{1}{cos^2\theta}d\theta$

x	$\frac{1}{\sqrt{3}} \to \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{2}{1+x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2}{1+tan^2\theta}\cdot\frac{1}{cos^2\theta}\,d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}1\,d\theta = 2[\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$$

以上、第 1 項と第 2 項をあわせると、

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}log\,2 - \sqrt{3}\,log\,3$$

よって、$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$c=-\sqrt{3}$

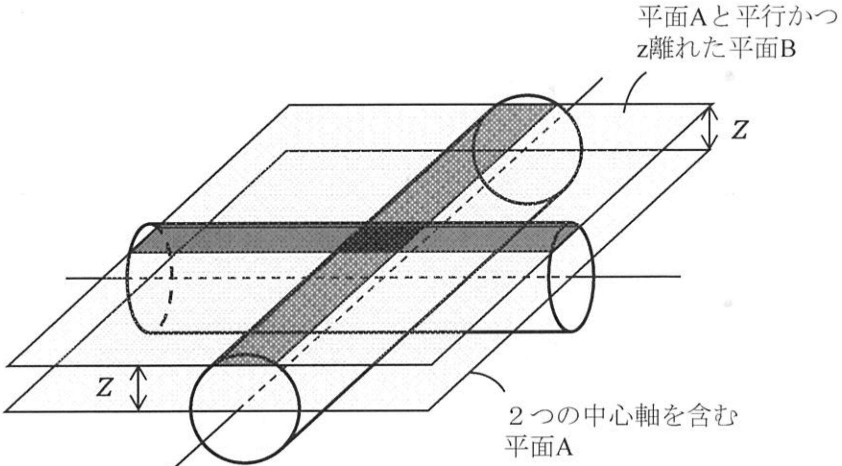
令和3年度

試験名：私費外国人留学生入試　　　　　　【理工学群　応用理工学類】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
問題1 問2	（解答）

(1)

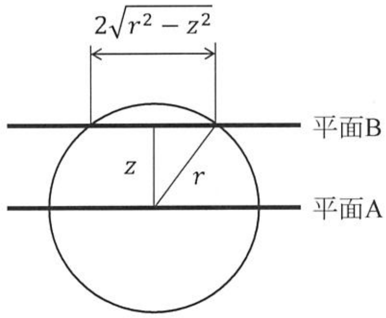
２本の中心軸を両方含む平面 A に対して平行かつ距離 z（$0<z<r$）だけ離れた平面 B で，２つの円柱を切った切り口を考える。

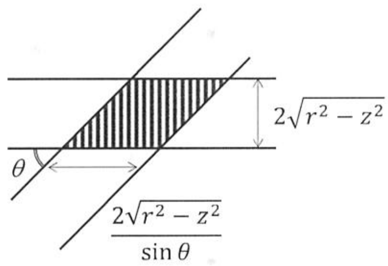


このとき，２つの円柱が重なった部分の立体を切った切り口は，図の斜線部分となり，この部分の面積は

$$\frac{4}{\sin\theta}(r^2-z^2)$$

となる。





したがって，２本の円柱の重なり部分の立体の体積は

$$V=2\int_0^r\frac{4}{\sin\theta}(r^2-z^2)\,dz=\frac{16r^3}{3\sin\theta}$$

となる。

(2)

$$\frac{dV}{d\theta}=-\frac{16r^3}{3}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

より，増減表は

θ	(0)	…	$\pi/2$	…	π
$\mathrm{d}V/\mathrm{d}\theta$		-	0	+	
V		↘	$16r^3/3$	↗	

となる。この表から分かる通り，Vは，$\theta=\pi/2$のときに，最小値$\frac{16}{3}r^3$をとる．

令和3年度

試験名：私費外国人留学生入試　　【理工学群　応用理工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題2	

［問題2］

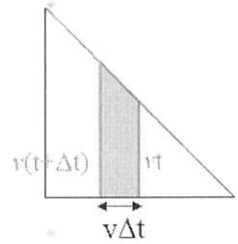
（出題意図）　電磁気学におけるファラデーの電磁誘導の法則とエネルギー保存則について出題している。これは大学で学ぶ電磁気学の基礎となる知識を問うものである。

（解答例）

(1)

(a)時間Δtの間に増大する回路内の磁束$\Delta\Phi$は右図の台形部分を貫く磁束。

$$\Delta\Phi = v\Delta t\times\frac{1}{2}\big(v(t+\Delta t)+vt\big)\times B \approx Bv^2t\Delta t$$



(b)起電力Vはファラデーの電磁誘導の法則により、回路内を貫く磁束の時間変化に等しい。よって$V=\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}=Bv^2t$

回路を流れる電流はオームの法則により

$$I=\frac{V}{R}=\frac{Bv^2t}{R}$$

(c)単位時間当たり回路で生じるジュール熱Wは

$$W=VI=\frac{V^2}{R}=\frac{(Bv^2t)^2}{R}$$

単位時間当たり力のx成分がする仕事は

$$W'=Fv$$

エネルギー保存則から力がする仕事と回路で生じるジュール熱は等しいので$W=W'$。よって

$$F=\frac{B^2v^3t^2}{R}$$

(2)

(a)時刻tから$t+\Delta t$の間にコンデンサーに加わっている電圧がΔV変化したとする。設問(1)-(b)の解答によると電圧は時刻に比例している。よって

$$\Delta V = Bv^2(t+\Delta t)-Bv^2t = Bv^2\Delta t$$

(b)電流Iは単位時間当たりに導線を通過した電荷量であるため、$I=\Delta Q/\Delta t$。Δtの時間内にコンデンサーに新たに蓄えられる電荷は$\Delta Q = C\Delta V$。よって、

$$I = CBv^2$$

(c)時刻tから$t+\Delta t$の間にコンデンサーに蓄えられるエネルギーはΔVの1次までで

$$\frac{1}{2}C(V+\Delta V)^2-\frac{1}{2}CV^2 \sim CV\Delta V = CB^2v^4t\Delta t$$

時刻tから$t+\Delta t$の間に力がする仕事は$W^*=Fv\Delta t$

エネルギー保存則から力がする仕事とコンデンサーに蓄えられるエネルギーは等しいので

$$F = CB^2v^3t$$