令和4年度

試験名：推薦入試　　　　　　　　　　　　　**【理工学群　応用理工学類】**

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 1	[問題 1]

（出題意図）積分法について出題している。これらは大学で学ぶ上で必須の知識であり，これらに対する理解度を問う。

（解答例）

問 1

(1) $\int \frac{x^2-2x-2}{x^3-1}dx = \int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx = -\log|x-1| + \log(x^2+x+1) + C$

(2) $\int \log(x+\sqrt{x^2+1})dx = x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \int x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

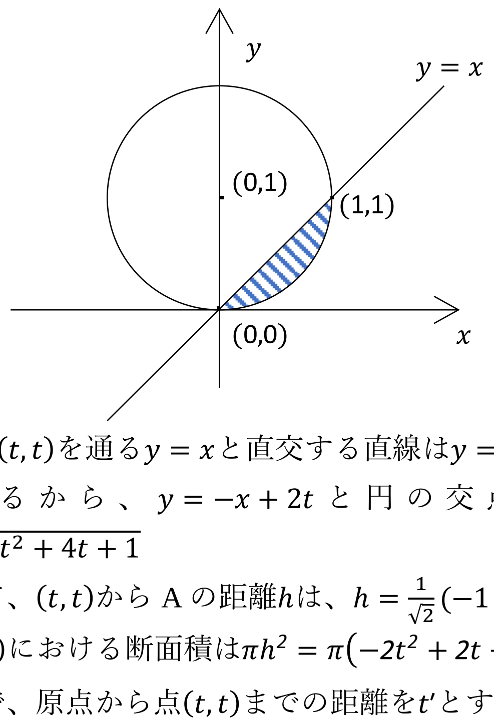
$\quad = x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1} + C$

(3) $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+2x+4}dx = \int_0^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx + \int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2+3}dx = [\log(x^2+2x+4)]_0^2 + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}d\theta \ = \log 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

※$\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2+3}dx = \int_1^3 \frac{1}{x'^2+3}dx' = \int_{1/\sqrt{3}}^{3/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{3(t^2+1)}dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{3}(\tan\theta^2+1)}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

問 2

(1)



(2)点(t,t)を通る$y=x$と直交する直線は$y=-x+2t$。円は$(y-1)^2+x^2=1$であるから、$y=-x+2t$と円の交点 A のx座標は$x=t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-4t^2+4t+1}$

よって、(t,t)から A の距離hは、$h=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\sqrt{-4t^2+4t+1})$。

点(t,t)における断面積は$\pi h^2 = \pi\left(-2t^2+2t+1-\sqrt{-4t^2+4t+1}\right)$となる。

ここで、原点から点(t,t)までの距離をt'とすると、$t=\frac{t'}{\sqrt{2}}$。よって、

$\pi h^2 = \pi\left(-t'^2+\sqrt{2}t'+1-\sqrt{-2t'^2+2\sqrt{2}t'+1}\right)$

これをt'について 0 から$\sqrt{2}$まで積分すると、

$\int_0^{\sqrt{2}} \pi\left(-t'^2+\sqrt{2}t'+1-\sqrt{-2t'^2+2\sqrt{2}t'+1}\right)dt'$

$$= \pi \left[-\frac{1}{3} t'^3 + \frac{1}{\sqrt{2}} t'^2 + t' \right]_0^{\sqrt{2}} - \pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{-2t'^2 + 2\sqrt{2}t' + 1}\, dt'$$

$$= \pi \left(-\frac{2}{3}\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \right) - \pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2} \sqrt{1 - (t' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2}\, dt'$$

$$= \pi \frac{4}{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1 - t''^2}\, dt'' \ \left(t'' = t' - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= \pi \frac{4}{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta \left(t'' = \sin\theta, dt'' = \cos\theta\, d\theta \right)$$

$$= \pi \frac{4}{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \pi \frac{4}{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}\pi \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= \pi \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}\pi^2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$= \sqrt{2}\pi \left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4} \right)$$

（別解）

$-45°$ 回転させると，$\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$と$x$軸に囲まれた部分を，$x$軸の周りに回転した体積になる。$x$における断面積$S(x)$は，

$$\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \ \to y = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$\to y^2 = \frac{1}{2} + 1 - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2}\sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 - x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}\sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

より$S(x) = \pi \left\{ 1 - x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}\sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \right\}$

$$\to V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left\{ 1 - x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}\sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \right\} dx$$

$$= \pi \left[x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 \right]_0^{\sqrt{2}} - \pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2} \sqrt{1 - \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dx$$

$$= \pi \left(\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} - \sqrt{2}\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi = \sqrt{2}\pi \left(\frac{5}{6} - \frac{\pi}{4} \right)$$

問題 2

[問題2]

（出題意図）空間図形および数列についての問題を出題している。これらは大学で学ぶ上で必須の知識であり，これらに対する理解度を問う。

（解答例）

問 1

(1) $a_1 = 2$ $a_2 = 4$, $a_3 = 20$ $a_4 = 88$を漸化式に入れ連立方程式を計算すると、$p = 3$および$q = -12$と求まる。

(2) $a_{n+2} = 3a_{n+1} + 10a_n - 12$なので、特性方程式$x^2 - 3x - 10 = 0$の 2 つの解が$x = 5, x = -2$であるから、題意を満たす$(\alpha, \beta)$は$(5, -2)$, および, $(-2, 5)$である。

(i) $(\alpha, \beta) = (5, -2)$のとき

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + \gamma = (-2)(a_{n+1} - 5a_n + \gamma)$$

であるから、$-3\gamma = -12$。したがって$\gamma = 4$。つまり$(\alpha, \beta, \gamma) = (5, -2, 4)$ 。

(ii) $(\alpha, \beta) = (-2, 5)$のときも同様にして，$(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, 5, -3)$。

(3) (2)の(i)のときは、

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4 = (-2)(a_{n+1} - 5a_n + 4)$$

が成り立つ。このとき$b_n = a_{n+1} - 5a_n + 4$とすると、数列$\{b_n\}$は初項$a_2 - 5a_1 + 4 = -2$, 公比-2 の等比数列となる。したがって、

$$b_n = a_{n+1} - 5a_n + 4 = -2 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^n \cdot\cdot\cdot ①$$

同様に(ii)のときも$C_n = a_{n+1} + 2a_n - 3$とすると数列$\{C_n\}$は初項$a_2 + 2a_1 - 3 = 5$, 公比 5 の等比数列となる。したがって、

$$C_n = a_{n+1} + 2a_n - 3 = 5 \cdot (5)^{n-1} = (5)^n \cdot\cdot\cdot ②$$

②−①から、$7a_n = (5)^n - (-2)^n + 7$。したがって、

$$a_n = \frac{1}{7}((5)^n - (-2)^n) + 1$$

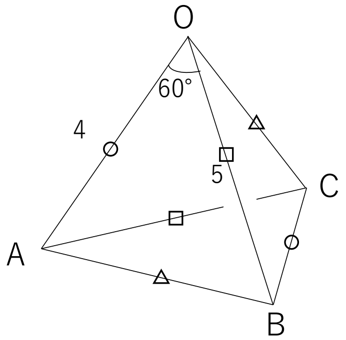
問 2

(1) 余弦定理より，

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right| \cos \angle AOB = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

したがって

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = \sqrt{21}$$



(2) すべての面が合同であるということから、

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} \left(= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OB}\right|^2}{2} = \frac{16 + 21 - 25}{2} = 6$$

同様に、

$$\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} \left(= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}\right) = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OA}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OC}\right|^2}{2} = 10$$

$$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CA} \left(= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OA}\right|^2}{2} = 15$$

	(3) 題意から、 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$・・・①, $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$・・・②, さらにHは面ABC上にあるので、$s+t+u=1$・・・③ ①から, $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ $=s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}+u\left(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right)$ $=-6s+15t+9u=0$ ・・・①′ 同様に②から, $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}+u\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BC}$ $=s\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)+t\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}+u\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BC}$ $=-4s-10t+6u=0$ ・・・②′ ③から, $u=1-s-t$・・・③′を①′, ②′に代入すると、 $5s-2t=3$・・・①″ $5s+8t=3$・・・②″ この連立方程式を解くと, $s=\frac{3}{5}$, $t=0$, $u=\frac{2}{5}$ が得られる。 (4) (3)から H は AC を 2 : 3 に内分する点であることから、 $\left\vert\overrightarrow{AH}\right\vert=2$, $\left\vert\overrightarrow{OH}\right\vert=2\sqrt{3}$ であることがわかる。したがって、四面体OABCの体積をVとすると, $V=\frac{1}{3}\left\vert\overrightarrow{OH}\right\vert\cdot\triangle ABC$ の面積 $=\frac{1}{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot5\cdot\sin60°=10$

【ねらい／解答例／採点基準について】

問 1　下線部①を和訳せよ。

【解答例】しかし，近代的，クリーンで手頃な価格のエネルギーの選択肢へのアクセスを高めることは，特に最貧層（人口の下位 5 分の 1）と最貧国における貧困削減に重要な役割を果たせるというコンセンサスが高まりつつある。

【説明】文前半と後半の関係が正しく訳せていること，「affordable energy」を文意に沿って自然な日本語に訳出できていること（「手頃な価格のエネルギー」,「低価格のエネルギー」,「安価なエネルギー」など）。

問 2　Figure 1 として最もふさわしいものを次の中から選び，その選択肢を回答せよ。理由も述べること。

【解答】(b)　 貧困率の高さと電力アクセスの低さは正の相関があるから。
【説明】文意より，貧困率の高さと電力アクセスの低さは正の相関があることがわかる。

問 3　下線部③を和訳せよ。

【解答例】食生活と栄養摂取量の改善
【説明】「diet」を自然な日本語に訳出できていること。

問 4　下線部④を和訳せよ。

【解答例】
その関係は悪循環として特徴付けられる。なぜなら，クリーンで安価なエネルギーを利用できない貧しい人々は，しばしば窮乏のサイクルに陥る。即ち，収入と生活環境を改善する手段とが限られていて、同時に、少ない収入のほとんどを，乾電池，原始的で非効率的な灯油ランプ，木炭あるいはろうそくといった貧弱で安全ではない高価で不健康なエネルギーに費やしてしまうからである。

【説明】複雑な構造の文章から，明確な論理構造を読み取り，日本語で適切に表現できることを確認する。

問 5　下線部⑤を和訳せよ。

【解答例

一方，貧しい人々が安定した電力供給やよりクリーンな燃料を利用できるようになると，雇用創出，商売および家庭での付加価値のある活動を支援できるようになり，わずかな「余剰」や貯蓄を蓄積することで，教育や保健サービスを利用したり，栄養状態の改善や住宅環境の改善が容易になり，それらによって貧困から徐々に抜け出せるようになる。

【説明】多くの関係代名詞で接続された文書から適切に意味を読み取り，日本語で表現する能力を確認する。

「When A, B」の構文を，単に「A の時，B である」と和訳せずに，文意に基づいて適切に和訳できるか。「that」についても同様に文意に基づいて適切に和訳できるか。

問 6　下線部⑥を和訳せよ。

【解答例】

発電機の騒音や排煙もなく，電気をより長い時間使えるようになりました。子供達は学校の後に夕方本を読むことができます。携帯電話を充電するために出かける必要もなくなり，長い時間働くことができるようになりました。数え切れないほどの利便性があります。GVE が私達のコミュニティへやってくる前に燃料やその代わりの手段にもっとお金を使っていたことと比べると，このサービスは本当にお得です。

【説明】文章から，プロジェクトの利点を的確に読み取り，日本語で表現する能力を確認する。