令和４年度

理工学群　数学類
国際バカロレア特別入試

小　論　文
試　験　問　題

注意事項

①　試験時間は１２０分です。全部で３問あり、すべてに解答してください。

②　問題ごとに解答用紙１枚ずつを使用し、各解答用紙の左上に問題の番号を明記してください。

③　解答が書ききれない場合は、「裏へ」と明記した上で、その解答用紙の裏面に続けて書いてください。ただし、上部は５，６㎝程あけてください（採点時には隠れてしまいます）。

問題 I　曲線

$$C_1: \quad y = \left|\log\left(x - \frac{3}{2}\right) + \log x\right| \qquad \left(x > \frac{3}{2}\right)$$
$$C_2: \quad y = \left|\log\left(x - \frac{3}{2}\right)\right| + |\log x| \qquad \left(x > \frac{3}{2}\right)$$

について以下の問いに答えよ．

(1) 曲線 C_1 の概形をかけ．

(2) $\dfrac{3}{2} < a < \dfrac{5}{2}$ とする．曲線 C_1，C_2 と直線 $x = a$ によって囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{a \to \frac{3}{2}+0} S(a)$ を求めよ．

問題 II　以下の問いに答えよ．

(1) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ を展開せよ．

(2) 方程式

$$m^3 + n^3 - 6mn = p - 8$$

を満たす正の整数 m，n と素数 p の組 $(m,\ n,\ p)$ をすべて求めよ．

問題 III　0 以上の整数 k について

$$2x + y = k, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

を満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を p_k とする．また，

$$2x + y + z = k, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad z \geqq 0$$

を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を q_k とする．

(1) p_0，p_1，p_2，q_0，q_1，q_2 を求めよ．

(2) p_k を k の式で表せ．

(3) $q_k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} p_\ell$ であることを示し，それを用いて q_k を k の式で表せ．

(4) すべての 0 以上の整数 N に対して $\displaystyle\sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{q_k} < 3$ が成り立つことを示せ．