筑波大学理工学群社会工学類

令和６年度

編入学試験

学力検査問題

（数学）

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題の中身を見てはいけません．

2. すべての解答用紙（罫紙）と下書き用紙の定められた欄に，志望する「学群・学類」,「氏名」,「受験番号」をすべて記入すること．

3. 解答用紙は６枚あります．

   解答用紙１枚目上部の細長い四角の枠内に「１」と記入すること．
   解答用紙２枚目上部の細長い四角の枠内に「２」と記入すること．
   解答用紙３枚目上部の細長い四角の枠内に「３」と記入すること．
   解答用紙４枚目上部の細長い四角の枠内に「４」と記入すること．
   解答用紙５枚目上部の細長い四角の枠内に「５」と記入すること．
   解答用紙６枚目上部の細長い四角の枠内に「６」と記入すること．

4. 問題は６問あります．

   問題１を解答用紙１枚目に解答しなさい．
   問題２を解答用紙２枚目に解答しなさい．
   問題３を解答用紙３枚目に解答しなさい．
   問題４を解答用紙４枚目に解答しなさい．
   問題５を解答用紙５枚目に解答しなさい．
   問題６を解答用紙６枚目に解答しなさい．

5. 解答にあたっては,導出過程も示すこと．

6. 解答用紙の裏面を使用しても構いません．

7. 試験終了後，解答用紙と下書き用紙を別々に集めます．問題冊子は持ち帰ってください．

問題1 m 次正方行列 A について，次の行列 S_n を考える．

$$S_n = E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$$

ただし，E は単位行列を表し，$\det(E-A) \neq 0$ とする．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 行列 A は対角化可能であるとする．つまり，適当な正則行列 P により $P^{-1}AP = D$（対角行列）が成り立つ．$(E-A)S_n$ を E, P, D を用いて表せ．

(2) $\lim_{n\to\infty} A^n$ が零行列 O となるとき，行列の無限等比級数 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は収束する（ある行列に限りなく近づく）．収束のための条件を行列 A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ を用いて示せ．また，そのときの $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(3) 行列 A を用いて表される線形システム $\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}$ を考える．ここで，m 次元ベクトル $\mathbf{d}$ はパラメータであり，m 次元ベクトル $\mathbf{x}$ は $A, \mathbf{d}$ の条件から定まる解である．任意の非負の要素を持つ $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ に対して，非負の解 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ を持つための行列 A の条件を1つ示せ．ただし，(2) の条件は満たされるものとする．

問題2 2次以下の実係数多項式 $f(x)$ 全体の集合を $\mathbb{R}[x]_2$ とする．$\mathbb{R}[x]_2$ の基底を $\{x^2, x, 1\}$ とし，$\mathbb{R}[x]_2$ から $\mathbb{R}[x]_2$ 自身への線形写像 F を「$f(x)$ を微分して x をかける」もの，つまり，$x\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ と定める．このとき，以下の各問に答えよ．

(1) 写像 F を基底を用いて表現せよ．

(2) 写像 F の表現行列 A を求めよ．

(3) 写像 F の像空間 $\mathrm{Im}\ F$ および核空間 $\mathrm{Ker}\ F$ の次元を求めよ．

問題 3 $E=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$ とする．2 次元実数空間 $\mathbb{R}^2$ で定義された連続関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和は，それぞれ正整数 m に対して，

$$R_m(f)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-i} f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{m}\right)\frac{1}{m^2}$$

で与えられている．$f(x,y)=e^{x+y}$ であるとき，以下の各問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の E 上でのリーマン和である $R_m(f)$ を求めよ．ただし，$Z=e^{1/m}$ とおくこと．

(2) (1) で得られたリーマン和を用いて，関数 $f(x,y)$ の E 上での 2 重積分を求めよ．

(3) 関数 $f(x,y)$ の E 上での累次積分を求めよ．

問題 4 領域 $D=\{(x,y)\mid (x-2)^2+(y+2)^2\le 18\}$ 上で与えられた関数

$$f(x,y)=xy(x-4)(y+4)$$

について，以下の各問に答えよ．

(1) D の内部において $f(x,y)$ が極値をとる点の候補をすべて探し，それらの点における $f(x,y)$ の値を求めよ．

(2) D の境界 $\{(x,y)\mid (x-2)^2+(y+2)^2=18\}$ 上における $f(x,y)$ の条件付極値をとる点の候補を，ラグランジュの未定乗数法によりすべて探し，それらの点における $f(x,y)$ の値を求めよ．

(3) $f(x,y)$ の最大値・最小値を求めよ．

問題 5 次のデータは，A 県と B 県のバス路線をそれぞれ1つ選び，始点から終点までの運行にかかった時間を記録したものである (単位：分).

A 県のデータ：75, 93, 95, 80, 75, 77, 83, 92, 80, 85
B 県のデータ：82, 87, 82, 84, 82, 90, 79, 82

上記のデータはそれぞれ正規分布 $N(\mu_A, \sigma_A^2), N(\mu_B, \sigma_B^2)$ に従うと仮定する．必要に応じて付表を参照しつつ，以下の各問に答えよ．

(1) 各県のデータを用いて標本分散 s_A^2, s_B^2 をそれぞれ求めよ．

(2) A 県の母分散 σ_A^2 の 95%信頼区間を求めよ．計算結果は小数第2位で四捨五入して答えること．

(3) 両県のデータを用いて，有意水準 5%で等分散検定をせよ．

問題 6 2つのプロジェクト P_1, P_2 の投資収益率はそれぞれ確率変数 X_1, X_2 で表され，プロジェクト P_i $(i = 1,2)$ の投資収益率の期待値は $E(X_i) = m_i$，分散は $V(X_i) = \sigma_i^2$ $(\sigma_i > 0)$，2つのプロジェクトの投資収益率の共分散は $Cov(X_1, X_2) = \sigma_{12}$ であるとする．2つのプロジェクトへの投資金額割合が $a_1, a_2 \geq 0$ $(a_1 + a_2 = 1)$ のとき，その投資の組み合わせ（以下，ポートフォリオ）の収益率は $R = a_1X_1 + a_2X_2$ である．以下の各問に答えよ．

(1) 共分散 $Cov(X_1, X_2)$ の定義式を示せ．

(2) ポートフォリオの収益率 R の期待値と分散を a_i, m_i, σ_i $(i = 1,2)$，σ_{12} を用いて表せ．

以降では，ポートフォリオのリスクを収益率 R の分散で表すことにする．

(3) 相関係数 $\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = -1$ のとき，ポートフォリオのリスクをゼロとするための a_1 と a_2 の比を求めよ．

(4) 相関係数 $\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = 1$，かつ，$\sigma_1 > \sigma_2$ のとき，ポートフォリオのリスクが，プロジェクト P_2 に単独で投資する場合よりも小さくできないことを示せ．

付表１：自由度 m の χ^2 分布において，右側裾野の確率が α となる臨界値

$m \setminus \alpha$	0.995	0.990	0.975	0.950	0.050	0.025	0.010	0.005
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819

付表２：自由度 (m, n) の F 分布において，右側裾野の確率が 0.05 となる臨界値

$m \setminus n$	6	7	8	9	10	11	12	13
6	4.284	3.866	3.581	3.374	3.217	3.095	2.996	2.915
7	4.207	3.787	3.500	3.293	3.135	3.012	2.913	2.832
8	4.147	3.726	3.438	3.230	3.072	2.948	2.849	2.767
9	4.099	3.677	3.388	3.179	3.020	2.896	2.796	2.714
10	4.060	3.637	3.347	3.137	2.978	2.854	2.753	2.671
11	4.027	3.603	3.313	3.102	2.943	2.818	2.717	2.635
12	4.000	3.575	3.284	3.073	2.913	2.788	2.687	2.604
13	3.976	3.550	3.259	3.048	2.887	2.761	2.660	2.577

付表３：自由度 (m, n) の F 分布において，右側裾野の確率が 0.025 となる臨界値

$m \setminus n$	6	7	8	9	10	11	12	13
6	5.820	5.119	4.652	4.320	4.072	3.881	3.728	3.604
7	5.695	4.995	4.529	4.197	3.950	3.759	3.607	3.483
8	5.600	4.899	4.433	4.102	3.855	3.664	3.512	3.388
9	5.523	4.823	4.357	4.026	3.779	3.588	3.436	3.312
10	5.461	4.761	4.295	3.964	3.717	3.526	3.374	3.250
11	5.410	4.709	4.243	3.912	3.665	3.474	3.321	3.197
12	5.366	4.666	4.200	3.868	3.621	3.430	3.277	3.153
13	5.329	4.628	4.162	3.831	3.583	3.392	3.239	3.115