筑波大学理工学群　工学システム学類

令和３年度編入学試験

学力検査問題

（150 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は，この表紙を含めて６ページあり，専門科目（数学，物理学）の各問題がまとめられています。
3. 問題数は，数学が２問，物理学が２問です。
4. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に，「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」を記入してください。
5. 解答に際しては，数学，物理学の各問題で，別々の解答用紙を用いて下さい．解答用紙は，裏面を用いても構いません。
6. 解答用紙の上部の $\boxed{}$ 内に，数学問題１，数学問題２，物理学問題１，物理学問題２と記入し，各問題に小問がある場合には，それらの小問の解答を全て要領良く記述して下さい。

数学１　試験問題

以下の問いに答えよ。

(1) 次の関数$f(x)$の$x=0$における微分可能性を調べよ（aは定数）。ただし，逆三角関数は主値をとるものとする。

$$f(x)=\begin{cases} a|x|-x\tan^{-1}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

(2) $\mathbb{R}^2$で定義された関数$f(x,y)=(2x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$を考える。

(a) 点(1，−1)において，$f(x,y)$の変化率（方向微分）が最大となる方向，およびその最大値を求めよ。

(b) $f(x,y)$の極値を求めよ。

(c) $x^2+y^2\geq 1$において，不等式　$0<f(x,y)\leq\dfrac{2}{e}$　が成り立つことを示せ。

(d) $\mathbb{R}^2$における$f(x,y)$の最大値，最小値を求めよ。

(3) 二重積分　$I_n=\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^n}dxdy\ (n=1,2,3,\ldots)$　は存在するか。存在する場合は，その値をnを用いて表わせ。存在しない場合は，「存在しない」と答えること。

数学2　試験問題

3次行列

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$$

を考える。なお，以下でIは3次の単位行列とする。

(1) 行列Aの固有値と固有ベクトルを求めよ。なお，各固有ベクトルは，その成分が簡単な整数となるようにすること。

(2) $P^{-1}AP$が対角行列となるように，正則行列Pとその逆行列P^{-1}を定めよ。なお，Pはその要素が簡単な整数となるようにすること。

(3) 行列A^3を

$$A^3=xA^2+yA+zI$$

のようにA^2, A, Iの線形結合で表したときの線形結合係数x, y, zを定めよ。

（設問(2)で求めた行列P, P^{-1}を用いると$P^{-1}A^3P$や$P^{-1}A^2P$も対角行列となること，およびAの固有値はどれもAの固有方程式を満たすことを利用するとよい。）

(4) 係数α, β, γを任意に選んで

$$C=\alpha A^2+\beta A+\gamma I$$

で与えられる3次行列Cを考えるとき，$C'=AC$で定義される行列C'も，ある係数α', β', γ'を用いて

$$C'=\alpha' A^2+\beta' A+\gamma' I$$

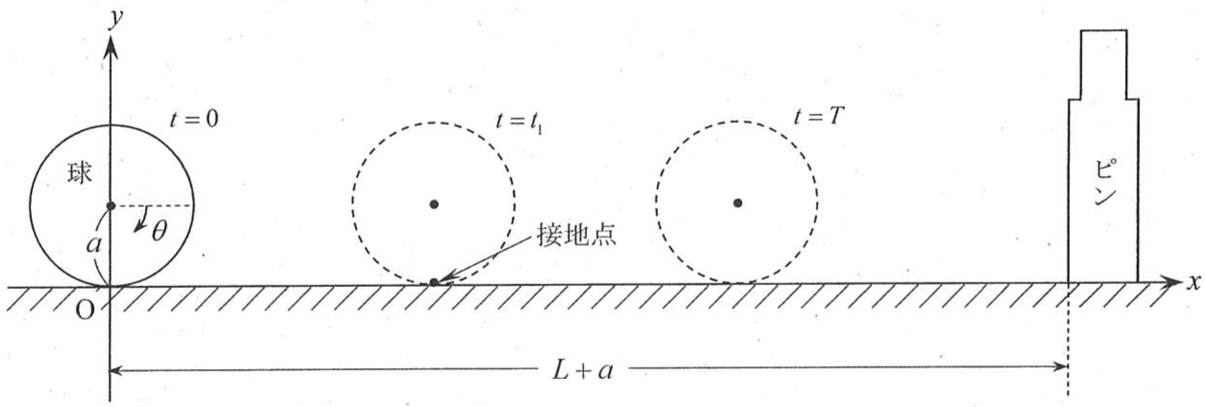
と表され，それらの係数の間には必ず

$$\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

の関係がある。3次行列Mを定め，その固有値を求めよ。

物理学 1 試験問題

図に示すように，水平なレーン（床）上に，半径a，質量mの一様な剛体球とみなせるボウリングの球，およびピンを考える。ボウリングの球に初期条件を与え，レーン上を運動させ，ピンまで到達させるとして，下記の設問に答えよ。ただし，紙面奥行き方向の運動は考えなくてよいものとし，球の回転軸は紙面に垂直とする。また，レーンに沿った方向にx軸，それと垂直な方向にy軸をとり，球の回転角θの正の向きを水平方向から時計回りにとる。さらに，原点Oからピンまでのx軸方向距離を$L+a$，ボウリングの球とレーンとの間の動摩擦係数をμ'，重力加速度をgとし，球の転がり抵抗（転がり摩擦）は無視してよいものとする。



まず，時刻$t=0$において，ボウリングの球に，重心位置$(x_G, y_G)=(0, a)$，重心速度$(\dot{x}_G, \dot{y}_G)=(v_1, 0)$，回転角$\theta=0$，および角速度$\dot{\theta}=\omega_1$の初期条件を与えたところ（$v_1>0$，$\omega_1>0$），球はレーンの上を滑らずに転がり，やがてピンに接触した。

(1) はじめに，ボウリングの球の慣性モーメントを求める。ボウリングの球を薄い円板の集合と考えることで，ボウリングの球の重心を通る軸まわりの慣性モーメントを導出せよ（導出過程を明示すること）。

(2) 任意の時刻$t=t_1$におけるボウリングの球の接地点の速度を示せ。ただし，t_1は球がピンに接触する前の時刻とする。

(3) ボウリングの球がピンに接触する時刻を求めよ。

次に，同じボウリングの球に，時刻$t=0$において，$(x_G, y_G)=(0, a)$，$(\dot{x}_G, \dot{y}_G)=(v_2, 0)$，$\theta=0$，および$\dot{\theta}=\omega_2$の初期条件を与えたところ（$v_2>0$，$\omega_2>0$，$v_2>a\omega_2$），球がレーンの上を$x$軸正方向に滑りながら転がった。その後，球は時刻$t=T$において滑らずに転がり始め，やがてピンに接触した。

(4) 滑りながら転がっているときのボウリングの球の運動方程式を，重心の並進運動および球の回転運動に対してそれぞれ立式せよ。

(5) Tをa，μ'，v_2，ω_2，gを用いて表せ。

(6) ボウリングの球がピンに接触する時刻を求めよ。ただし，解答にTを用いてよいものとする。

物理学２　試験問題

１．図１のように，電流 I が流れる導線が真空中にある。宇宙の初期にはモノポールが存在した可能性が議論されている。仮想的なモノポールである磁荷 q_m を位置 $\boldsymbol{r}'$ に置く。その磁荷 q_m が導線上の位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は，クーロンの法則より

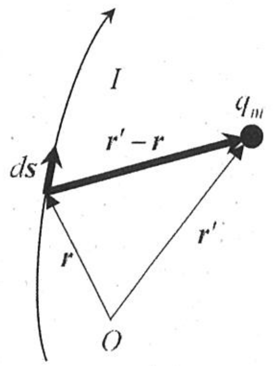


図１

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\dfrac{q_m}{4\pi\mu_0}\dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}$ で与えられる。ここで，μ_0 は真空の透磁率であり，磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\mu_0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ となる。

(1) 磁荷 q_m がもたらす磁束密度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が導線上の位置 $\boldsymbol{r}$ にある電流素片 $Id\boldsymbol{s}$ に作用するローレンツ力 $d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を，I, $d\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を用いて表せ。

(2) その際，電流素片は磁荷に対して上記のローレンツ力と大きさが同じで反対方向の力を作用させる。電流素片 $Id\boldsymbol{s}$ が作る磁束密度 $d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')$ から磁荷 q_m が受ける力 $d\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}')$ は $d\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}')=\dfrac{q_m d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')}{\mu_0}$ となる。これらのことから，位置 $\boldsymbol{r}$ にある大きさ I の電流が流れる電流素片 $Id\boldsymbol{s}$ が位置 $\boldsymbol{r}'$ に作る磁束密度は，$d\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}d\boldsymbol{s}\times\dfrac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^2}$ （ビオ・サバールの法則）となることを示せ。

（次ページに続く）

2．導線を円筒面上に規則的に巻いたものをソレノイドという。図２は真空中に置かれたソレノイドの断面である。単位長さあたりの導線の巻き数 n，半径 R，長さ L のソレノイドに大きさ I の電流を流す。ソレノイド左端の中心を座標の原点とする。

(1) ソレノイドの z の位置の微小区間 dz の部分の導線の円電流が，z 軸上の点 z_0 に発生させる磁束密度 dB の大きさと向きを，ビオ・サバールの法則を用いて導け。

(2) (1)で求めた dB を $z=0$ から $z=L$ まで積分することで z 軸上の点 z_0 での磁束密度 B の大きさを求めよ。必要であれば，$\int \frac{1}{\left(x^2+c\right)^{3/2}}dx = \frac{x}{c\sqrt{x^2+c}}$ （c は正定数）の関係を用いてもよい。

以下では，$L \gg R$ の場合を考える。

(3) (2)の結果を用いて，z 軸上の点 $z_0 = \frac{L}{2}$ での磁束密度 B の大きさを求めよ。

(4) また，図２の $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ の経路について，アンペールの法則を適用することにより，ソレノイドの外部の磁束密度がゼロとみなせることを説明せよ。

(5) ソレノイドの端の z 軸上の点 $z=0$ での磁束密度 B の大きさを求めよ。

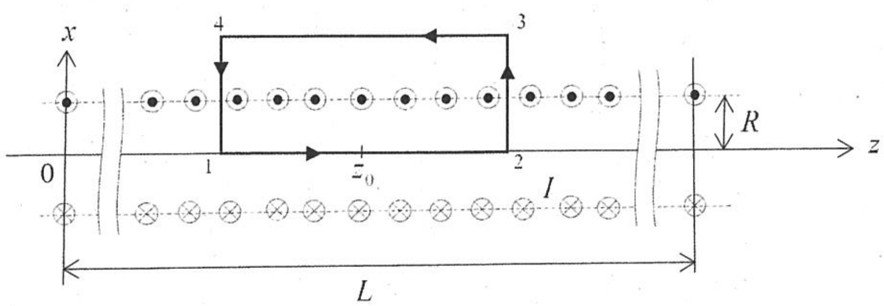


図２