

令和3年度

試験名: 推薦入試

【理工学群 工学システム学類】

区 分	標準的な解答例又は出題意図																								
問題 1	<p>[問題 1] (出題意図)積分法や微分法について出題している。これらは大学で学ぶ上で必須の知識であり、これらに対する理解度を問う。</p> <p>(解答例) 問 1</p> <p>(1) $f(t) = \int_0^1 (3x + 2t\sqrt{1-x})^2 dx$ $= 9\int_0^1 x^2 dx + 12t\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx + 4t^2\int_0^1 (1-x) dx$ $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ $\int_0^1 x\sqrt{1-x} dx \quad s = \sqrt{1-x} \text{ とすると}$ $= \int_1^0 (1-s^2)s(-2s) ds = \int_1^0 (-2s^2 + 2s^4) ds = \left[-\frac{2}{3}s^3 + \frac{2}{5}s^5 \right]_1^0 = \frac{4}{15}$ $\int_0^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$ 以上から $f(t) = 2t^2 + \frac{16}{5}t + 3 = 2\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{43}{25}$ よって $f(t)$ は $t = -\frac{4}{5}$ のとき最小となる。</p> <p>(2) $f(x) = -3\cos^2 x - 3\sin x \cos 2x - \sin x + 4$ $t = \sin x$ とすると、$f(x)$ は t の関数として $f(t) = 6t^3 + 3t^2 - 4t + 1$ 表すことができる。 3次関数なので、$-1 \leq t \leq 1$ の間での関数 $f(t)$ の増減を調べればよい。 $f'(t) = 18t^2 + 6t - 4 = 2(3t+2)(3t-1)$ より増減表は下記のようになる。</p> <table border="1" data-bbox="466 1738 1399 1868"> <tr> <td></td> <td>-1</td> <td></td> <td>-2/3</td> <td></td> <td>1/3</td> <td></td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>$f'(t)$</td> <td></td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$f(t)$</td> <td>2</td> <td>↗</td> <td>29/9</td> <td>↘</td> <td>2/9</td> <td>↗</td> <td>6</td> </tr> </table> <p>最小値は $\frac{2}{9}$，最大値は 6 となる。</p>		-1		-2/3		1/3		1	$f'(t)$		+	0	-	0	+		$f(t)$	2	↗	29/9	↘	2/9	↗	6
	-1		-2/3		1/3		1																		
$f'(t)$		+	0	-	0	+																			
$f(t)$	2	↗	29/9	↘	2/9	↗	6																		

問2

(1) $f(0) = g(0) = 1.$

(2) $g'(x) = -2x \sin x^2.$

(3) 与式の右辺を部分積分すると,

$$f(x) = g(x) + f(x) - e^x f(0) + e^x \int_0^x f(t) e^{-t} dt$$

$$\therefore \int_0^x f(t) e^{-t} dt = 1 - e^{-x} g(x).$$

(4) (3)で求めた式の両辺を x に関して微分すると,

$$f(x) e^{-x} = e^{-x} [g(x) - g'(x)].$$

よって,

$$f(x) = g(x) - g'(x).$$

を得る。ここで, (1)で求めた結果を考慮すると, $g(x)$ は

$$g'(0) = g(0) - f(0) = 0$$

なる関係式を満たす必要がある。(2)で求めた結果はこれを満足するので, $f(x)$ は次の表式になる。

$$f(x) = \cos x^2 + 2x \sin x^2.$$