令和4年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　【 理工学群　社会工学類 】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
問題1 解答例	(1) 以下の固有方程式： $$\det(\lambda E - A) = (\lambda-2)^2(\lambda-5) = 0$$ を解くことにより，固有値は $\lambda = 2$（重解），5 が求まる． (2) 各固有値に対して， $$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$ を満たす固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ ($\neq$ $\boldsymbol{0}$) を求める．例えば，次のようなベクトルが求まる： $\lambda = 2$ のとき（固有空間の次元は 2），$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\lambda = 5$ のとき（固有空間の次元は 1），$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3) $\lambda = 5$ の固有ベクトルを $\boldsymbol{x_1}$，$\lambda = 2$ の固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}$ とおき，順番にグラムシュミットの直交化法により正規直交基底を求める． $$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\lVert \boldsymbol{x}_1 \rVert}\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 実対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルはそれぞれ直交するので， $$\boldsymbol{e'}_2 = \boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x}_2, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\lVert \boldsymbol{e'}_2 \rVert}\boldsymbol{e'}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 最後に， $$\boldsymbol{e'}_3 = \boldsymbol{x}_3 - (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{x}_3)\boldsymbol{e}_2, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\lVert \boldsymbol{e'}_3 \rVert}\boldsymbol{e'}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$ (4) (3) で求めた基底を並べた行列を $P = [\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \boldsymbol{e}_3]$ とする．Pは直交行列なので，$P^{-1} = {}^tP$ が成り立つ．従って， $${}^tPAP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

令和4年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　　　　　【 理工学群 社会工学類 】

<table>
<tr><th>区　　分</th><th>標準的な解答例又は出題意図</th></tr>
<tr><td>問題2 解答例</td><td>

(1) 素直に行列の掛け算を計算すると，次の対角行列を得る．

$$ {}^tAA = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{a}_1\| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \|\boldsymbol{a}_n\| \end{bmatrix} $$

あとは，各列が独立であること，あるいは，行列式がゼロでない等，行列がフルランクであることを示せばよい．例えば，

$$ \det({}^tAA) = \|\boldsymbol{a}_1\| \times \cdots \times \|\boldsymbol{a}_n\| \neq 0 $$

(2) $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ で張られる空間と $\boldsymbol{b} - A\hat{x}$ は直交するので，

$$ A \cdot (\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0} \iff {}^tA\boldsymbol{b} - {}^tAA\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} $$

また，${}^tAA$ は正則であるので，逆行列をとることができ，$\hat{\boldsymbol{x}} = \left({}^tAA\right)^{-1} {}^tA\boldsymbol{b}$ ．

(3) $A\hat{\boldsymbol{x}} = \Phi\boldsymbol{b}$ に (2) で求めた $\hat{\boldsymbol{x}}$ を代入すれば，

$$ \Phi = A\left({}^tAA\right)^{-1} {}^tA $$

が求まる．なお，Φは対称行列であり，かつ，$\Phi^2 = \Phi$ である．

(4) ベクトル $\boldsymbol{b}$ にそれぞれの射影行列を作用させて得られるベクトルの内積を計算すると，

$$ (E - \Phi)\boldsymbol{b} \cdot \Phi\boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{b}\,{}^t(E - \Phi)\Phi\boldsymbol{b} = {}^t\boldsymbol{b}(\Phi - \Phi^2)\boldsymbol{b} = 0 $$

である（それぞれの行列により射影されたベクトルは直交する）．つまり，射影行列 $(E - \Phi)$ は，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ で張られる空間と直交する空間へ射影していることとなる．

</td></tr>
</table>

令和4年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　　　　　　　【 理工学群　社会工学類 】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題3 解答例	(1) まず，$\Gamma(n+1)$ を部分積分により計算する． $$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du=-[u^n e^{-u}]_0^\infty+\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du=n\Gamma(n)$$ ただし，$\lim_{u\to\infty}(u^n e^{-u})=0$（例えば，ロピタルの定理を繰り返し適用することで示すことができる）．つまり，上記の漸化式より，$\Gamma(n+1)=n!\,\Gamma(1)$ が得られる．ここで， $$\int_0^\infty e^{-u}\,du=-[e^{-u}]_0^\infty=1$$ であるので題意が示された． (2) 変数変換により，積分区間は $\infty\to 0$ である．また， $$dx=-\frac{x}{(n+1)}du$$ 従って，(1) の結果も合わせて次の結果が得られる． $$\int_0^1 x^n(\log x)^n dx=\int_0^\infty(-1)^n\frac{e^{-u}u^n}{(n+1)^{n+1}}du=(-1)^n(n+1)^{-(n+1)}n!$$ (3) (2) の結果および問題の指示を用いると， $$\int_0^1 x^{-x}\,dx=\int_0^1\sum_{n=0}^\infty\frac{(-x\log x)^n}{n!}dx=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1(x\log x)^n\,dx=\sum_{n=0}^\infty(n+1)^{-(n+1)}$$ $$=\sum_{n=1}^\infty n^{-n}$$ であり，題意が示された．

令和4年度
試験名：学群編入学試験　　　　　　　　　　【 理工学群 社会工学類 】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 4 解答例	(1) $$G_x(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^2}\ ,\qquad G_y(x,y)=\frac{y-x}{x^2+y^2}\ .$$ (2) $$(x,y)=\pm\left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right),\quad \pm\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$$ （複号同順．以下同じ）． (3) $\psi(x)=G(x,g(x))=0$ とおき，両辺を微分する等の操作を行うことで， $$g'(x)=\frac{x+g(x)}{x-g(x)},\qquad g''(x)=\frac{1+g'(x)^2}{x-g(x)}$$ を得る． (4) $\phi(x)=F\big(x,g(x)\big)$ とおく．$\big(x,g(x)\big)=\pm\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$ のとき， $$g'(x)=0,\qquad g''(x)=\frac{1}{2x}=\pm\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$ であることを用いると， $$\phi'(x)\ =\ 0,\qquad \phi''(x)\ =\ 4>0$$ となる．従って，$F(x,y)$ は点 $\pm\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}},-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$ において極小値 $-e^{-\frac{\pi}{2}}$ をとる．

令和4年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　　　　　　　【 理工学群　社会工学類 】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題5 解答例	標本不偏分散をU^2とおく． (1) $\frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{0.025}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{0.975}(n-1)}$ より $56.9 \leq \sigma^2 \leq 457.$ (2) $\bar{X} \pm t_{0.05}(n-1)U/\sqrt{n}$ より $63.4 \leq \mu \leq 80.6.$ (3) $\bar{X} \pm 1.96 \cdot 11/\sqrt{n}$ より $64.8 \leq \mu \leq 79.2.$
問題6 解答例	(1) T の分布関数は， $F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(X_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$ となるから，これを微分して確率密度関数 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$ を得る． (2) $P(T \geq 2) = \int_2^{\infty} \frac{3}{2} e^{-\frac{3t}{2}} dx = e^{-3} \simeq 1/20.09 \simeq 0.05.$ (3) F の分布関数は， $F(h) = P(H \leq h) = P(T \leq s + h \mid T > s)$ $= \frac{P(s < T \leq s + h)}{P(T > s)} = \frac{\left(1 - e^{-\lambda(s+h)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda s}\right)}{e^{-\lambda s}} = 1 - e^{-\lambda h} \quad (h > 0).$ これを微分して， $f(h) = \lambda e^{-\lambda h} \quad (h > 0).$ （従って H は T と同じ平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う．）