

# 筑波大学理工学群社会工学類

令和4年度

編入学試験

学力検査問題

(数学)

## 【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題の中身を見てはいけません。
2. すべての解答用紙（罫紙）と下書き用紙の定められた欄に、志望する「学群・学類」、「氏名」、「受験番号」をすべて記入すること。
3. 問題は6問あります。問題ごとにそれぞれ別の解答用紙を使用すること。
4. 解答にあたっては、導出過程も示すこと。
5. 必要に応じて付表を参照すること。
6. 解答用紙の裏面を使用しても構いません。
7. 解答用紙上部の細長い四角の枠内に問題番号を記入すること。
8. 試験終了後、解答用紙と下書き用紙を別々に集めます。問題冊子は持ち帰ってください。

問題1 次の3次正方行列を考える.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

このとき, 以下の各問に答えよ.

- (1) 行列  $A$  の固有値をすべて求めよ.
- (2) 行列  $A$  のそれぞれの固有値に対応する, 固有空間を張る (固有) ベクトルを求めよ.
- (3) (2) で求めた固有ベクトルを用いて, 3次実数空間の正規直交基底を求めよ.
- (4) (3) で求めた正規直交基底を並べた行列  $P$  を用いて, 行列  $A$  を対角化せよ.

問題2  $m$  次実数空間  $\mathbb{R}^m$  内の互いに直交する線形独立な  $n$  個の列ベクトルを  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  ( $\neq \mathbf{0}$ ) とする. また, これらのベクトルを並べた,  $m \times n$  行列を  $A$  と表す. このとき, 以下の各問に答えよ. なお,  $\mathbf{0}$  はゼロベクトル,  ${}^tA$  は行列  $A$  の転置,  $E$  は単位行列を表す.

- (1)  $n$  次正方行列  ${}^tAA$  が正則であることを示せ.
- (2)  $\mathbb{R}^m$  内のベクトル  $\mathbf{b}$  の  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  で張られる空間への正射影を考える. ベクトル  $\mathbf{b}$  を射影した点の座標 (つまり,  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  で張られる空間内でベクトル  $\mathbf{b}$  に最も近い点の座標) を  $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$  とする.  $\hat{\mathbf{x}}$  を  $A$  と  $\mathbf{b}$  により表現せよ.
- (3)  $A\hat{\mathbf{x}} = \Phi\mathbf{b}$  を満たす射影行列  $\Phi$  を  $A$  により表現せよ.
- (4)  $(E - \Phi)$  も射影行列を表している.  $(E - \Phi)\mathbf{b}$  はベクトル  $\mathbf{b}$  のどの空間への正射影となるかを説明せよ.

問題 3 以下の各問に答えよ.

- (1)  $x > 0$  に対して, 次の関数を定義する.

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$$

任意の正の整数  $n$  に対して,  $\Gamma(n+1) = n!$  が成り立つことを示せ.

- (2) 次の定積分を  $u = -(n+1) \log x$  ( $\Leftrightarrow x = e^{-\frac{u}{n+1}}$ ) とする置換積分により計算せよ. ただし,  $n$  は任意の正の整数を表す.

$$\int_0^1 x^n (\log x)^n dx$$

- (3) 以下の恒等式を証明せよ.

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \left( = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^{-2} + 3^{-3} + \dots + n^{-n}) \right)$$

ただし; (2) の結果, および, 次のマクローリン展開の結果を用いること.

$$x^{-x} = e^{(-x \log x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x \log x)^n}{n!}$$

また, 積分  $\int$  と和  $\sum$  の順序は交換してもよいとする.

問題4 2つの2変数関数

$$F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$$

$$G(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x}$$

について、以下の各問に答えよ。ただし、 $y = \arctan x$  は  $y = \tan x$  ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ) の逆関数である。また、 $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$  である。

- (1)  $G(x, y)$  の  $x, y$  に関する偏導関数  $G_x(x, y), G_y(x, y)$  をそれぞれ求めよ。
- (2) ラグランジュの未定乗数法を用いて、 $F(x, y)$  が条件  $G(x, y) = 0$  のもとで極値をとる点の候補を求めよ。
- (3)  $G(x, y) = 0$  の陰関数  $y = g(x)$  について、その1次導関数  $g'(x)$  を  $x$  および  $g(x)$  で表せ。また、2次導関数  $g''(x)$  を  $x, g(x)$  および  $g'(x)$  で表せ。
- (4) (3) を用いて、条件  $G(x, y) = 0$  のもとでの  $F(x, y)$  の極小値を求めよ。

問題5 次は、あるクラスのテストの点数である。

77 74 75 85 90 67 62 60 58

このデータの標本平均は72.0、標本不偏分散は124.5である。テストの点数は、正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従う母集団から無作為に抽出した標本とみなせるものとする。このとき、以下の各問に答えよ。なお、計算の過程で適宜、有効数字3桁に丸めてよい。

- (1) 母分散  $\sigma^2$  の95%信頼区間を求めよ。
- (2) 母平均  $\mu$  の95%信頼区間を求めよ。
- (3)  $\sigma^2 = 121$  と判明したとき、 $\mu$  の95%信頼区間を求めよ。

問題6 ある店の単位時間あたりの来客数  $X$  は、平均  $\lambda$  のポアソン分布に従う。すなわち、 $t$  時間あたりの来客数  $X_t$  は、

$$P(X_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

に従う。このとき、以下の各問に答えよ。

- (1) 来客の発生間隔  $T$  の確率密度関数  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} (t > 0)$  を導出せよ。
- (2) 1時間平均 1.5 人の来客があるとき、2時間以上来客が無い確率を求めよ。
- (3) 開店時刻  $t_0$  から  $s$  時間来客が無いとき、時刻  $t_0 + s$  から初めて客が来るまでの時間  $H$  の確率密度関数を導出せよ。

付表 1

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	---------------------

付表 2

$e^1 = 2.718$	$e^2 = 7.389$	$e^3 = 20.09$	$e^4 = 54.60$	$e^5 = 148.4$
---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

付表 3 標準正規分布表:  $Q(z) = \int_0^z \phi(t)dt$ . ただし,  $\phi(\cdot)$  は標準正規分布の確率密度関数

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986

付表4  $\chi^2$  分布表：自由度  $m$  の  $\chi^2$  分布の上側  $100\alpha\%$  点  $\chi_\alpha^2(m)$

$\alpha \backslash m$	6	7	8	9	10
0.975	1.237	1.690	2.180	2.700	3.247
0.950	1.635	2.167	2.733	3.325	3.940
0.050	12.59	14.07	15.51	16.92	18.31
0.025	14.45	16.01	17.53	19.02	20.48

付表5  $t$  分布表：自由度  $m$  の両側  $100\alpha\%$  点  $t_\alpha(m)$

$\alpha \backslash m$	6	7	8	9	10
0.10	1.943	1.895	1.860	1.833	1.812
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.228