筑波大学理工学群　工学システム学類

令和４年度編入学試験

学力検査問題

（150 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は，この表紙を含めて６ページあり，専門科目（数学，物理学）の各問題がまとめられています。
3. 問題数は，数学が２問，物理学が２問です。
4. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に，「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」を記入してください。
5. 解答に際しては，数学，物理学の各問題で，別々の解答用紙を用いて下さい．解答用紙は，裏面を用いても構いません。
6. 解答用紙の上部の $\boxed{}$ 内に，数学問題１，数学問題２，物理学問題１，物理学問題２と記入し，各問題に小問がある場合には，それらの小問の解答を全て要領良く記述して下さい。

数学 1　試験問題

(1) 複素変数 z の三角関数 $f(z)=\cos z$ に対し，$z=x+iy$, $f(z)=re^{i\theta}$ （i は虚数単位）とおくとき，以下の空欄 (a) にあてはまる y の関数を答えよ。

$$r^2=\cos^2 x+\boxed{\text{(a)}}$$

(2) 関係式 $F(x,y)=x^2-2xy+9y^2-8=0$ をみたす関数 $y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(a)　停留点（$f'(x)=0$ となる点）をすべて求めよ。

(b)　(a)で求めた各点において $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(c)　(a),(b)の結果を用いて極値をすべて求めよ。

(3) 定積分 $I_n=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$ $(n=1,2,\cdots)$ について，以下の問いに答えよ。

(a)　I_1 を求めよ。

(b)　I_n $(n\geqq 2)$を求めよ。

数学 2　試験問題

xy平面上における 2 次曲線 C

$$4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = 21,$$

について考える。以下の問いに答えよ。

(1) $4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2 = (x \ \ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$を満たす対称行列$A$を求めよ。

(2) Aの固有値λ_1，λ_2を求めよ。ただし，$\lambda_1 \leqq \lambda_2$とする。

(3) (2)で求めた各固有値について，正規化された固有ベクトルを求めよ。

(4) Aを$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$の形に対角化する直交行列$P$，およびその逆行列$P^{-1}$を求めよ。

(5) 座標変換$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$を行うとき，2 次曲線 C を，x'，y'を用いて表せ。

(6) x'軸およびy'軸を，それぞれx，yを用いた直線の式で表せ。

(7) 2 次曲線 C の概形をxy平面上に描け。ただし，図中にはx'軸とy'軸を明記すること。

物理学１　試験問題

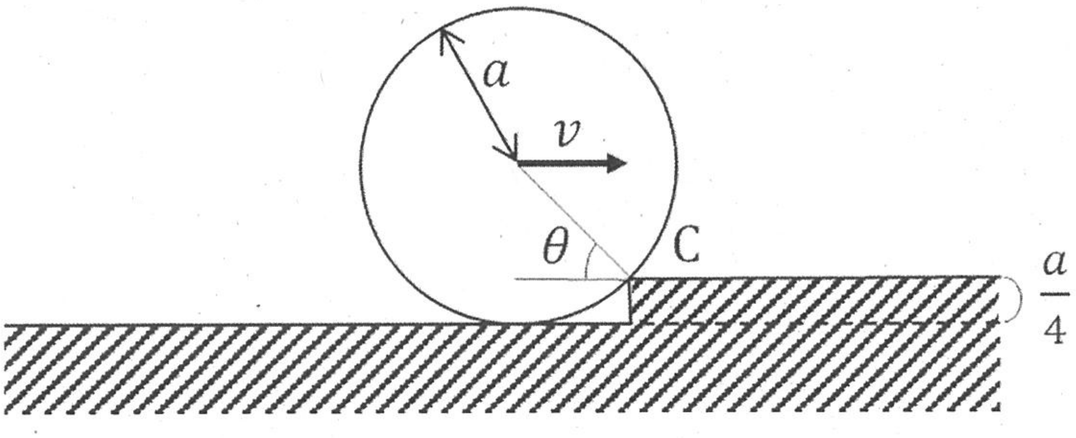
下図のような平面内で，半径a，質量Mの円板が，粗い水平な床の上を滑らずに転がって，鉛直上向きに$a/4$高くなっている段差の先端の点Cに接触する。円板は点Cで段差に接触してから段差を上がり切る間，点Cから離れたり，滑ったりしないものとする。円板の密度は一様として，円板の中心軸まわりの慣性モーメントをI_0，円板の点Cを通る回転軸まわりの慣性モーメントをIとする。点Cと接触する直前の円板の中心の水平方向の速度をvとする。円板が段差を上がる間，円板の中心と点Cを結ぶ直線が水平面となす角度をθ，重力加速度をgとして以下の問いに答えよ。

（１）円板の中心軸まわりの慣性モーメントI_0を，円板の質量M，半径aを用いて表せ。

（２）円板が段差を上がる間の，円板の点Cを通る回転軸まわりの慣性モーメントIを，円板の質量M，半径aを用いて表せ。

（３）円板が段差を上がる間の，円板の点Cを通る回転軸まわりの回転に関する運動方程式を示せ。

（４）円板が段差を上がりきるために必要な速度vの条件を，円板の半径aと重力加速度gを用いて表せ。



物理学 2　試験問題

図 1 のように無限に広いxy平面（$z=0$）を境界として誘電体 1（誘電率ε_1）と誘電体 2（誘電率ε_2）が接している。z軸上の点 A（$z=d$）に点電荷qがある。このとき，点電荷qのつくる電場により誘電体界面に分極電荷が現れる。系全体の電場は，点電荷qと分極電荷のつくる電場の重ね合わせになる。系全体の電場を，鏡像法を用いて考える。以下の問いに答えよ。

まず，誘電体 1 あるいは 2 のみで全空間が満たされている場合を考える。

(1) $z>0$の領域の電場は，点 A$(0,0,d)$にある点電荷qと点 B$(0,0,-d)$にある点電荷q'の 2 つの点電荷が作るものと仮定する。このとき，鏡像法の考え方に従い，図 2 のように全空間が誘電体 1 で一様に満たされているものとして計算する。xy平面上に生じる電場のx, y, z成分（それぞれ，$E_{1x}(x,y,0)$, $E_{1y}(x,y,0)$, $E_{1z}(x,y,0)$とする）を求めよ。

(2) $z<0$の領域の電場は，点 A$(0,0,d)$にある点電荷q''が作るものと仮定する。ここでは図 3 のように全空間が誘電体 2 で一様に満たされているものとして計算する。xy平面上に生じる電場のx，y，z成分（それぞれ，$E_{2x}(x,y,0)$, $E_{2y}(x,y,0)$，$E_{2z}(x,y,0)$とする）を求めよ。

次に，図 1 のようにxy平面で誘電体 1 と誘電体 2 が接している場合を考える。

(3) 界面における電場の接線成分（x成分）に関する境界条件を，$E_{1x}(x,y,0)$および$E_{2x}(x,y,0)$を用いて表わせ。

(4) 界面における電場の垂直成分（z成分）に関する境界条件を，$E_{1z}(x,y,0)$および$E_{2z}(x,y,0)$を用いて表わせ。

(5) (3)と(4)で得られた境界条件を連立方程式として解き，点電荷q'およびq''をε_1，ε_2，qを用いて表わせ。

(6) $\varepsilon_1>\varepsilon_2$とする。$E_{1z}(x,y,0)$と$E_{2z}(x,y,0)$の大きさの大小関係を答えよ。また，この系の電気力線を模式的に正しく表しているのは，図 4(a)と図 4(b)のどちらであるかを示せ。

（次ページへ続く）

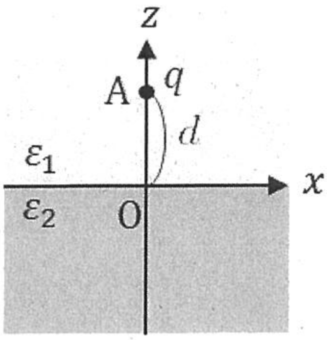


図1

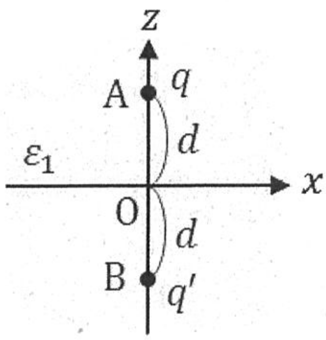


図2

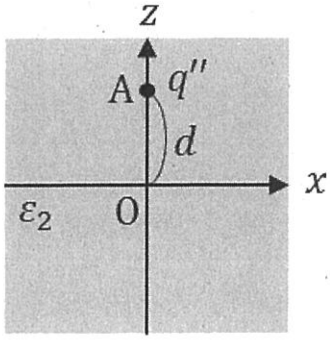


図3

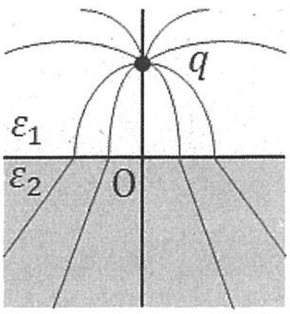


図4(a)

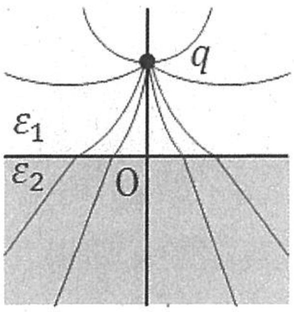


図4(b)