

令和4年度

理工学群 数学類
推薦入試

小論文
試験問題

注意事項

- ① 試験時間は120分です。全部で3問あり、すべてに解答してください。
- ② 問題ごとに解答用紙1枚ずつを使用し、各解答用紙の左上に問題の番号を明記してください。
- ③ 解答が書ききれない場合は、「裏へ」と明記した上で、その解答用紙の裏面に続けて書いてください。ただし、上部は5, 6 cm程あけてください(採点時には隠れてしまいます)。

問題 I 曲線

$$C_1: y = \left| \log \left(x - \frac{3}{2} \right) + \log x \right| \quad \left(x > \frac{3}{2} \right)$$

$$C_2: y = \left| \log \left(x - \frac{3}{2} \right) \right| + |\log x| \quad \left(x > \frac{3}{2} \right)$$

について以下の問いに答えよ.

- (1) 曲線 C_1 の概形をかけ.
- (2) $\frac{3}{2} < a < \frac{5}{2}$ とする. 曲線 C_1, C_2 と直線 $x = a$ によって囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする. 極限值 $\lim_{a \rightarrow \frac{3}{2}+0} S(a)$ を求めよ.

問題 II 以下の問いに答えよ.

- (1) $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ を展開せよ.
- (2) 方程式

$$m^3 + n^3 - 6mn = p - 8$$

を満たす正の整数 m, n と素数 p の組 (m, n, p) をすべて求めよ.

問題 III 0 以上の整数 k について

$$2x + y = k, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

を満たす整数の組 (x, y) の個数を p_k とする. また,

$$2x + y + z = k, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

を満たす整数の組 (x, y, z) の個数を q_k とする.

- (1) $p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2$ を求めよ.
- (2) p_k を k の式で表せ.
- (3) $q_k = \sum_{\ell=0}^k p_\ell$ であることを示し, それを用いて q_k を k の式で表せ.
- (4) すべての 0 以上の整数 N に対して $\sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{q_k} < 3$ が成り立つことを示せ.