令和3年度

試験名：推薦入試　　　　　　　　　　　　**【理工学群　応用理工学類】**

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 1	[問題 1] (出題意図)積分法や微分法について出題している。これらは大学で学ぶ上で必須の知識であり，これらに対する理解度を問う。 (解答例) 問 1 (1) $f(t)=\int_0^1 (3x+2t\sqrt{1-x})^2 dx$ $=9\int_0^1 x^2 dx+12t\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx+4t^2\int_0^1 (1-x)dx$ $\int_0^1 x^2 dx=\dfrac{1}{3}$ $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$　　$s=\sqrt{1-x}$ とすると $=\int_1^0 (1-s^2)s(-2s)ds=\int_1^0 (-2s^2+2s^4)ds=\left[-\dfrac{2}{3}s^3+\dfrac{2}{5}s^5\right]_1^0=\dfrac{4}{15}$ $\int_0^1 (1-x)dx=\left[x-\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1=\dfrac{1}{2}$ 以上から $f(t)=2t^2+\dfrac{16}{5}t+3=2(t+\dfrac{4}{5})^2+\dfrac{43}{25}$ よって $f(t)$ は $t=-\dfrac{4}{5}$ のとき最小となる。 (2) $f(x)=-3\cos^2 x-3\sin x\cos 2x-\sin x+4$ $t=\sin x$ とすると，$f(x)$ は t の関数として $f(t)=6t^3+3t^2-4t+1$ と表すことができる。 3 次関数なので，$-1\le t\le 1$ の間での関数 $f(t)$ の増減を調べればよい。 $f'(t)=18t^2+6t-4=2(3t+2)(3t-1)$ より増減表は下記のようになる。 | t | -1 | | -2/3 | | 1/3 | | 1 | | $f'(t)$ | | + | 0 | − | 0 | + | | | $f(t)$ | 2 | ↗ | 29/9 | ↘ | 2/9 | ↗ | 6 | 最小値は $\dfrac{2}{9}$，最大値は 6 となる。

問 2

(1) $f(0)=g(0)+0=1.$

(2) $g'(x)=-2x\sin x^2.$

(3) 与式の右辺を部分積分すると,

$$f(x)=g(x)+f(x)-e^x f(0)+e^x\int_0^x f(t)e^{-t}dt$$

$$\therefore \quad \int_0^x f(t)e^{-t}dt=1-e^{-x}g(x).$$

(4) (3)で求めた式の両辺を x に関して微分すると,

$$f(x)e^{-x}=e^{-x}\left[g(x)-g'(x)\right].$$

よって,

$$f(x)=g(x)-g'(x).$$

を得る。ここで, (1)で求めた結果を考慮すると, $g(x)$ は

$$g'(0)=g(0)-f(0)=0$$

なる関係式を満たす必要がある。(2)で求めた結果はこれを満足するので, $f(x)$ は次の表式になる。

$$f(x)=\cos x^2+2x\sin x^2.$$

問題 2

[問題 2]
(出題意図)空間図形，および数列についての問題を出題している。これらは大学で学ぶ上で必須の知識であり，これらに対する理解度を問う。

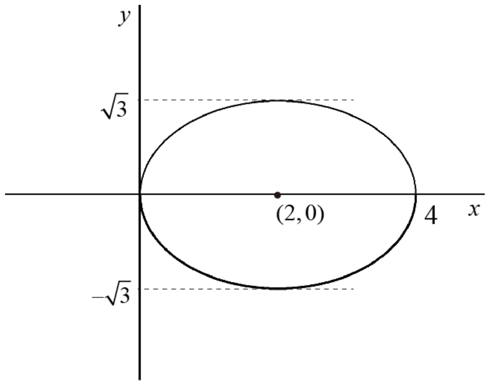
(解答例)
問 1

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at\\bt\\3-3t\end{pmatrix}$$

P の座標は $(at,bt,3-3t)$

(2)
球の方程式は
$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$
(1) の答えを代入すると
$(at-1)^2+b^2t^2+(2-3t)^2=1$
$(a^2+b^2+9)t^2-2(a+6)t+4=0$
P が球面上にあることから
判別式: $D/4=(a+6)^2-4(a^2+b^2+9)\geqq 0$ が成り立つ。
$\Rightarrow\ 3(a-2)^2+4b^2\leqq 12$
$\Rightarrow\ \dfrac{(a-2)^2}{4}+\dfrac{b^2}{3}\leqq 1$
よって B の動く範囲は楕円の内部およびその周となり、図に示すと下図のような楕円の内部および周になる。



問 2

(1) $$f(x)=g(x)$$
$$\Rightarrow -nx^2+2(n+1)nx=-nx[x-2(n+1)]=0$$
$$\therefore M=0,\ N=2(n+1).$$

(2) $$a_k=f(k)-g(k)+1=k^2+(n+1)n^2-(n+1)(k-n)^2+1$$
$$=-nk^2+2n(n+1)k+1$$

とすると,

$$S=\sum_{k=M}^{N}a_k=\sum_{k=1}^{N}a_k+a_0$$
$$=-n\sum_{k=1}^{N}k^2+2n(n+1)\sum_{k=1}^{N}k+\sum_{k=1}^{N}1+1$$
$$=-\frac{n}{6}N(N+1)(2N+1)+n(n+1)N(N+1)+N+1$$
$$=\frac{1}{6}(N+1)\left[-nN(2N+1)+6n(n+1)N+6\right]$$
$$=\frac{1}{6}(N+1)\left[nN(6n-2N+5)+6\right]$$
$$=\frac{1}{3}(2n+3)\left[n(n+1)(2n+1)+3\right].$$

ここで, 公式

$$\sum_{k=1}^{N}k=\frac{1}{2}N(N+1),\quad \sum_{k=1}^{N}k^2=\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$$

を用いた。