

令和4年度

理工学群数学類
私費外国人留学生入試

小論文
試験問題

注意事項

- ① 問題Ⅰ～問題Ⅲは別々の解答用紙に日本語で解答してください。
- ② 試験時間は90分です。

問題 I 以下の問いに答えよ.

- (1) 正の整数 m, n は互いに素であるとする. このとき m^3 と n は互いに素であることを示せ.
- (2) 方程式 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ は区間 $(1, 2)$ においてただ 1 つの解をもち, その解は無理数であることを示せ.

問題 II 曲線 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ($x > 0, y > 0$) 上の点 P における接線を l とし, l と x 軸との交点を Q とする. 原点を O とし, $\angle OPQ = \theta$ として, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P が曲線 C 上を動くとき, $\sin \theta$ の最小値を求めよ. ただし, 最小値を与える θ の値は求めなくてよい.
- (2) $\sin \theta$ の値が最小であるとき, $\triangle OQP$ の外接円の面積を求めよ.

問題 III 整式の列 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を以下で定める.

$$f_1(x) = 2x$$

$$f_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x) \quad (n \geq 2)$$

- (1) 等式 $f_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n+1)\theta$ ($n \geq 1$) を示せ.
- (2) 正の整数 n に対し, 方程式 $f_n(x) = 0$ は区間 $(-1, 1)$ においてちょうど n 個の解をもつことを示せ.
- (3) 正の整数 n に対し, 定積分 $\int_{-1}^1 |f_n(x)| dx$ を求めよ.
- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 x^2 |f_{2n-1}(x)| dx$ を求めよ.