筑波大学理工学群　工学システム学類

令和６年度編入学試験

学力検査問題

（150 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は，この表紙を含めて７ページあり，専門科目（数学，物理学）の各問題がまとめられています。
3. 問題数は，数学が２問，物理学が２問です。
4. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に，「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」を記入してください。
5. 解答に際しては，数学，物理学の各問題で，別々の解答用紙を用いてください。解答用紙は，裏面を用いても構いません。
6. 解答用紙の上部の $\boxed{\quad\quad\quad}$ 内に，数学問題１，数学問題２，物理学問題１，物理学問題２と記入し，各問題に小問がある場合には，それらの小問の解答を全て要領良く記述してください。

数学１　試験問題

１．$ax^2 - bxy^3 + y^6 = 1$で与えられるxy平面上の曲線Cが点$(1,1)$を通るとする(a, bは定数)。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a, bが満たすべき条件を求めよ。

(2)　aが$3 \leq a \leq 4$の範囲を動くとき，点$(1,1)$において曲線Cの接線の傾き$\dfrac{dy}{dx}$がとりうる値の範囲を求めよ。

２．以下の問いに答えよ。

(1)　2 変数関数$f(x,y) = e^{x+y}$のマクローリン展開を 2 次の項まで求めよ。

(2)　2 変数関数$f(x,y) = e^{x+y}\sin x$のマクローリン展開を 3 次の項まで求めよ。

３．半径 2 の球があり，球の中心から距離rの位置の密度（単位体積あたりの質量）は$9-4r$で与えられる（$0 \leq r \leq 2$)。この球を水平な机の上に置き，机面から高さ 3 の水平な面で切断して上部を切り出した。切り出した部分の質量をMとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　Mは球の中心を原点とする 3 次元極座標で

$$M = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{[\ \mathrm{a}\ ]} \sin\theta\, d\theta \int_{[\ \mathrm{b}\ ]}^{2} [\ \ \mathrm{c}\ \ ]\, dr$$

と表される。［　a　］，［　b　］，［　c　］に入る数または数式を求めよ。

(2)　Mの値を求めよ。

数学 2　試験問題

対称行列 $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ は 2 つの固有値λ_1, λ_2を持ち，$\lambda_1 < \lambda_2$とすれば $\lambda_1 = -8$ である。このAについて以下の問いに答えよ。

(1)　$\lambda_1 = -8$ に対する方程式$A\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}$の一般解を，一次独立なベクトル$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$とパラメータ$s, t$を用いて$\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$の形で表せ。

(2)　(1)で求めた一般解を，正規直交系をなすベクトル$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$とパラメータ$u, v$を用いて$\boldsymbol{x} = u\boldsymbol{c} + v\boldsymbol{d}$の形で表せ。

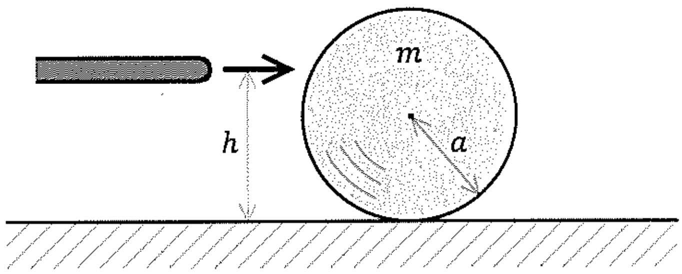
(3)　$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ を$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0' + \boldsymbol{x}_0''$の形に分解せよ。ただし$\boldsymbol{x}_0'$は(2)で求めた$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$を用いて$\boldsymbol{x}_0' = u\boldsymbol{c} + v\boldsymbol{d}$の形に表せるベクトル，$\boldsymbol{x}_0''$は$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$に直交するベクトルである。

(4)　(3)で求めた$\boldsymbol{x}_0''$がAの固有ベクトルとなることを示せ。

(5)　自然数nに対して$A^n \boldsymbol{x}_0$を求めよ。

物理学１　試験問題

１．図に示すように，あらい水平面上においた，半径 a ，質量 m の密度が一様な球に，中心を含む鉛直面内で，水平面から高さ h（ただし，$0<h<2a$）の位置に水平に撃力を加えると，球が運動をはじめた。このときの球の運動に関して，以下の問いに答えよ。ただし，水平面と球の間のすべりの摩擦係数を μ ，重力加速度を g とする。また，撃力が作用している間は摩擦力の力積は無視できるものとする。



(1) 球の運動に関する以下の記述の $\boxed{\text{①}}$ ～ $\boxed{\text{⑨}}$ にあてはまる数式を答えよ。

撃力が作用した時刻 t_1 から t_2 の間の力の大きさを $F(t)$ とすると，力積は $\boxed{\text{①}}$ で表せる。力積を $\boxed{\text{①}} = J$ と置くと，球の重心は速度 $v_0 = \boxed{\text{②}}$ で動き出す。

球の重心に対する力のモーメントの大きさは，撃力によるモーメントの大きさを $\boxed{\text{③}}$ ，摩擦力によるモーメントの大きさを $\boxed{\text{④}}$ と表せるので，球の慣性モーメントを I ，球の回転の角速度を ω とすると，以下の式が成り立つ。

$$\boxed{\text{⑤}} = \boxed{\text{③}} - \boxed{\text{④}}$$

撃力の作用した時間がきわめて短く，摩擦力の力積は無視できるものとし，上式を時刻 t_1 から t_2 で積分すると，球は角速度 $\omega_0 = \boxed{\text{⑥}}$ で回転し出すことがわかる。

球の慣性モーメントは，$I = \boxed{\text{⑦}}$ であるので，球の回転による，球の表面の速さ $a\omega_0$ は，以下の式で表せる。

$$a\omega_0 = \boxed{\text{⑧}}$$

したがって，球が水平面に対してすべる速さは，以下の式で与えられる。

$$v_0 - a\omega_0 = \boxed{\text{⑨}} \qquad \cdots \text{(A)}$$

（次ページに続く）

(2) (1) の(A)式にもとづき，撃力を受けた直後からの球の運動を，撃力の作用する高さ h により 3 つに場合分けして，定性的に記述せよ。ただし，転がりの抵抗力はすべりの摩擦力より十分小さいものとする。

物理学２　試験問題

図１のように，真空中に置かれた幅Wの無限に長い導体平板を考える。厚さは無視できるほど薄いものとする。導体平板内を長さ方向に定常電流が流れている。電流密度（単位幅当たりの電流）は一様とみなせ，その値を$j(>0)$とする。図１のように，板の中心軸をx軸に取り，電流と同じ向きを正の向きとする。平板と平行にy軸，そして平板に垂直にz軸を取る。ただし，$y' < y < y' + \Delta y$の範囲を流れる直線電流が点Q$(0, 0, h)$に作る磁束密度を$\Delta \boldsymbol{B}$とする。ただし，Δy は十分小さいとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 磁束密度$\Delta \boldsymbol{B}$のx成分を求めよ。

(2) 磁束密度$\Delta \boldsymbol{B}$の大きさを，アンペールの法則$\oint_C \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}$を用いて求めよ。アンペールの法則の積分における経路Cと面Sを，図を用いて説明すること。ここで，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$は位置$\boldsymbol{r}$における磁束密度，$\mu_0$は真空の透磁率，$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$は位置$\boldsymbol{r}$における電流密度である。

(3) 磁束密度$\Delta \boldsymbol{B}$の向きの単位ベクトルを求めよ。

(4) 導体平板を流れる電流全体が点Qに作る磁束密度$\boldsymbol{B}$はy軸の方向を向く。この理由を，図を使って説明せよ。

(5) 導体平板を流れる電流全体が点Qに作る磁束密度$\boldsymbol{B}$の大きさを求めよ。

次に，導体平板の幅が無限に広い場合を考える。上と同様に，電流密度jの一様な定常電流がx軸の正の向きに流れている。一辺の長さがaの正方形の回路ABCDを，その面が導体平板と平行になるように$z > 0$の領域に置く。回路の辺ABと辺CDがx軸と平行である。図２に示した向きに定常電流Iを流す。回路は変形しないものとする。また，回路を流れる電流がつくる磁場は無視できるとする。

(6) 導体平板を流れる電流がつくる磁束密度$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$は，$0 < z$と$z < 0$のそれぞれの領域で一定となる。$0 < z$と$z < 0$のそれぞれについて，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$をベクトルの成分表示で答えよ。

（次ページに続く）

(7)　正方形の回路の各辺AB, BC, CD, DAが受ける力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}, \boldsymbol{F}_{\mathrm{BC}}, \boldsymbol{F}_{\mathrm{CD}}, \boldsymbol{F}_{\mathrm{DA}}$をベクトルの成分表示で答えよ。必要であれば，磁束密度$\boldsymbol{B}$の磁場中にある電流素片$I\Delta\boldsymbol{s}$は，$\Delta\boldsymbol{F} = I\Delta\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}$の力を受けることを用いてよい。

(8)　回路全体が受ける力$\boldsymbol{F}$および偶力のモーメント$\boldsymbol{N}$を求め，ベクトルの成分表示で答えよ。

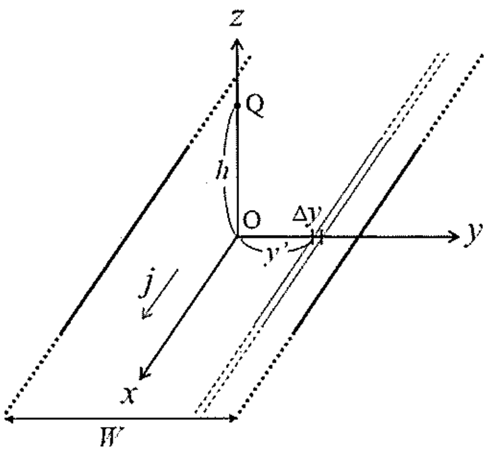


図1

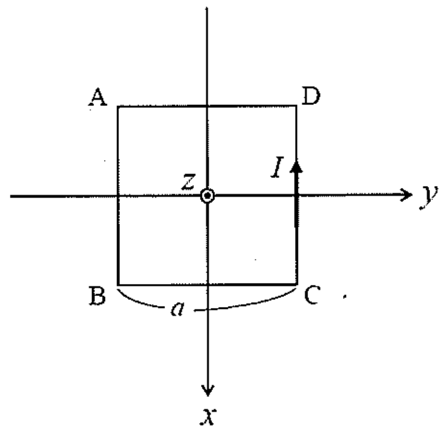


図2