筑波大学理工学群社会工学類
令和３年度
編入学試験
学力検査問題
（数学）

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで，この問題の中身を見てはいけません．

2. すべての解答用紙（罫紙）と下書き用紙の定められた欄に，志望する「学群・学類」,「氏名」,「受験番号」をすべて記入すること．

3. 問題は６問あります．問題ごとにそれぞれ別の解答用紙を使用すること．

4. 解答にあたっては,導出過程も示すこと．

5. 必要に応じて付表を参照すること．

6. 解答用紙の裏面を使用しても構いません．

7. 解答用紙上部の細長い四角の枠内に問題番号を記入すること．

8. 試験終了後，解答用紙と下書き用紙を別々に集めます．問題冊子は持ち帰ってください．

問題1 $n \times n$ 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} b & \cdots & \cdots & b & a \\ \vdots & & \iddots & a & b \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ b & a & \iddots & & \vdots \\ a & b & \cdots & \cdots & b \end{bmatrix}$$

とおく．但し，n は 2 以上の整数，a, b は実数で，$a \neq 0$ であるとする． 以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の行列式の値を a, b および n を用いて表せ.

(2) 行列 A の行列式の値が 0 となるようなすべての b に対して，b を a と n を用いて表せ.

(3) (2) で求めたそれぞれの b に対応する行列 A の階数を求めよ.

問題2 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形変換 f について，以下の問に答えよ.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z \\ x+y \\ 4x \end{bmatrix}$$

(1) $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ に関する f の表現行列であることを示せ.

(2) H の固有値，各固有値の固有空間をそれぞれ求めよ.

(3) $\mathbb{R}^3$ の基底で，その基底に関する f の表現行列が対角行列になるようなものを1つ求めよ.

問題 3 関数 $F(x,y) = xy - x^3 + y^2$ について, 以下の問に答えよ.

(1) $F(x,y) = 0$ を満たす陰関数 $y = f(x)$ の極値となる点 $(x, f(x))$ をすべて求めよ. また, その点が極大値か極小値かについても理由とともに説明せよ.

(2) 原点において $F(x,y) = 0$ を近似する直線をすべて求めよ.

問題 4 以下の問に答えよ.

(1) 関数 $g(x) = x^x (x > 0)$ について, $\lim_{x \to +0} g(x)$ を計算せよ.

(2) 与えられた領域 D において, (1) の結果を用いて, 次の広義 2 重積分の値を求めよ.

$$\iint_D \frac{x \log(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dxdy, \ D = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

問題 5 確率変数 X について, その平均 $\mu = E(X)$, 分散 $\sigma^2 = V(X)$ とする. 以下の問に答えよ.

(1) X は確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型の確率変数とした場合, 定数 $k > 0$ に対して $|X - \mu| \geq k$ を満たす確率の上限を求めよ.

(2) $E(X) = 2, E(X^2) = 9$ のとき, (1) の結果を用いて, $-1 < X < 5$ を満たす確率の下限を求めよ.

(3) $X_1, X_2, \ldots, X_{16}$ が正規分布 $N(2,4)$ からの無作為標本であるとき, 標本平均 $\bar{X}$ に対して $|\bar{X} - 2| < 0.75$ を満たす確率を求めよ. さらに, (1) を用いて $|\bar{X} - 2| < 0.75$ を満たす確率を上限もしくは下限で評価し, 両者を比較せよ.

問題 6 A 大学と B 大学において，1 年生の数学の学力に差があるかどうかを調べるため，A 大学から 9 人，B 大学から 7 人をそれぞれ無作為に選んで，実力テストを行ったところ，次のような結果を得た．

A 大学	72	73	84	65	75	92	81	74	59
B 大学	45	48	89	50	44	57	87		

A 大学，B 大学のテストの点数はそれぞれ正規分布 $N(\mu_A, \sigma_A^2), N(\mu_B, \sigma_B^2)$ に従うと仮定する．以下の問に答えよ．

(1) テストの点数のばらつきは A 大学，B 大学で等しいと見なしてよいか．有意水準 5% で等分散検定せよ．

(2) A 大学と B 大学で数学の学力に差があると言えるか．有意水準 5% で検定せよ．

付表 1 標準正規分布表： $Q(z) = \int_0^z \phi(t)dt.$　但し, $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986

付表 2

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{11} = 3.317$

付表 3 F 分布表： 分子の自由度 m_1, 分母の自由度 m_2 の F 分布の上側 5% 点 $F_{0.05}(m_1, m_2)$（上段）と上側 2.5% 点 $F_{0.025}(m_1, m_2)$（下段）

m_1 \ m_2	6	7	8	9
6	4.28	3.87	3.58	3.37
	5.82	5.12	4.65	4.32
7	4.21	3.79	3.50	3.29
	5.70	4.99	4.53	4.20
8	4.15	3.73	3.44	3.23
	5.60	4.90	4.43	4.10
9	4.10	3.68	3.39	3.18
	5.52	4.82	4.36	4.03

付表 4 t 分布表： 自由度 m の両側 100α% 点 $t_\alpha(m)$

α \ m	6	7	8	9	14	15	16
0.1	1.943	1.895	1.860	1.833	1.761	1.753	1.746
0.05	2.447	2.365	2.306	2.262	2.145	2.131	2.120