令和4年度

試験名：　学群編入学試験　【理工学群　工学システム学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
	数学問題 1
出題意図	解析学の基本事項に関する理解度，及び計算力を試す．
解答例	(1) 定義より（あるいは加法定理より）$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$. $r^2 = (\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + (1-\cos^2 x) \cdot \sinh^2 y = \cos^2 x + \sinh^2 y$. したがって，(a) $\sinh^2 y$.
	(2) $F_x(x,y) = 2x - 2y,\ F_y(x,y) = -2x + 18y,\ F_{xx}(x,y) = 2$.
	(a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{2x-2y}{-2x+18y} = 0$ より $x = y$. $F(x,y) = 0$ とから $y^2 - 2y^2 + 9y^2 - 8 = 0$ より $8y^2 - 8 = 0$, すなわち $y = \pm 1$. このとき $F_y \neq 0$. したがって，停留点は $x = \pm 1$.
	(b) $F_x(x,y) = 0$ のとき，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{F_{xx}}{F_y} = -\dfrac{2}{-2x+18y}$. したがって，$(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$ において $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \mp\dfrac{1}{8}$（複号同順）.
	(c) $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$ において $\dfrac{d^2y}{dx^2} \lesseqgtr 0$（複号同順）より 極大値 $f(1) = 1$, 極小値 $f(-1) = -1$ をもつ.

(3) (a) $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{1+x^2}\,dx = \Big[\tan^{-1} x\Big]_0^A \longrightarrow \frac{\pi}{2}\ \ (A\to\infty)$ より $\underline{\underline{I_1 = \frac{\pi}{2}}}$.

(b) $n \geq 2$ のとき,

$$J_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = J_{n-1} + \int x\cdot\frac{-x}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

$\displaystyle\left(\frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}\right)' = \frac{-x}{(1+x^2)^n}$ より

$$\begin{aligned} J_n =& J_{n-1} + x\cdot\frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}\int\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx \\ &= J_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)}J_{n-1} \\ &= \frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}. \end{aligned}$$

$\displaystyle\left[\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right]_0^A \longrightarrow 0\ \ (A\to\infty)$ より $\displaystyle I_n = \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$.

したがって,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}I_1 = \underline{\underline{\frac{(2n-3)(2n-5)\cdot\cdots\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}}}$$

$$\left(= \underline{\underline{\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\{(n-1)!\}^2}\cdot\pi}} \right)$$

別法）$x^2 = t$ とおくと,

$$\begin{aligned} I_n =& \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right) \\ =& \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{(n-1)!} \\ =& \cdots \end{aligned}$$

より同じ結果を得る.

数学問題 2

出題意図

応用理工学類および工学システム学類での授業内容を理解できるだけの数学の学力があるかを調べる。この問題では，線形代数で扱う行列の固有値，固有ベクトル，対角化に関する応用力の基礎的な理解について調べる。

解答例

1.

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおくと，$4x^2-2\sqrt{3}xy+6y^2=(x\ \ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=ax^2+2bxy+cy^2$

よって，$A=\begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}$

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 6-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-7)=0$ $\quad\therefore$ 固有値は 3, 7

(3) $\lambda_1=3$ のとき，正規化された固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1$ とすると，

$(A-\lambda_1 E)\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ より，$x_1-\sqrt{3}x_2=0$ $\ \therefore \boldsymbol{x}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=7$ のとき，同様に，正規化された固有ベクトル $\boldsymbol{x}_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(4) $A=P\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}P^{-1}$ と対角化されるとき，

正規化された固有ベクトルを並べることにより

$P=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$， $P^{-1}={}^tP=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(5)　2 次曲線 C は，(3)の結果を用いて $(x\ \ y)P\begin{pmatrix}3&0\\0&7\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=21$ と表せる。

$(x'\ \ y')=(x\ \ y)\,P$ を転置すると $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ より，$(x'\ \ y')\begin{pmatrix}3&0\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=21$

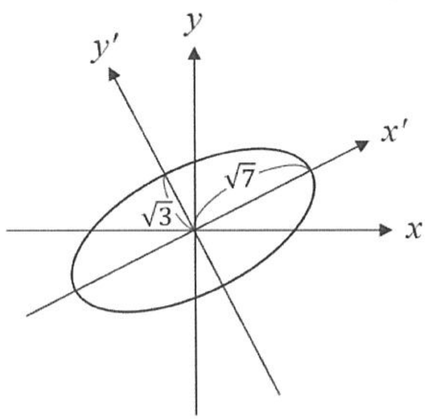
よって，$\dfrac{x'^2}{7}+\dfrac{y'^2}{3}=1$

(6) $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}x+y\\x-\sqrt{3}y\end{pmatrix}$ より，

x' 軸は直線 $y'=0$ であるから，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

y' 軸は直線 $x'=0$ であるから，$y=-\sqrt{3}x$

(7) 下記の楕円。



解答例	物理学問題 1

(1)

$$I_0 = \rho \int_0^a r^2 2\pi r dr = 2\pi\rho \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi\rho a^4$$

$\rho = M/\pi a^2$を代入して，

$$I_0 = \frac{1}{2}\pi\rho a^4 = \frac{1}{2}Ma^2$$

(2)

点 C 回りの円板の慣性モーメントIは

$$I = I_0 + Ma^2$$

の関係があるので，

$$I = \frac{3}{2}Ma^2$$

(3)

運動方程式は，以下のとおりとなる．

$$I\ddot{\theta} = -Mg\,a\cos\theta$$

(4)

運動方程式の両辺に$2I\dot{\theta}$をかける．

$$2I^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -2Mg\,a\,I\cos\theta\ \dot{\theta}$$

tで積分する．

$$I^2\dot{\theta}^2 = -2Mg\,a\,I\sin\theta + A$$

ここで，A は積分定数．円板が点 C に接触するとき，$\sin\theta = 3/4$，角運動量は$Mv\left(a - \frac{1}{4}a\right) + I_0\frac{v}{a}$となるので代入する．

$$A = \left(\frac{3}{4}Ma + \frac{I_0}{a}\right)^2 v^2 + \frac{3}{2}M\,g\,a\,I$$

上式を A に代入する．

$$I^2\dot{\theta}^2 = \left(\frac{3}{4}Ma + \frac{I_0}{a}\right)^2 v^2 + \frac{3}{2}M\,g\,a\,I - 2Mg\,a\,I\sin\theta$$

両辺をI^2で割る．

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{I^2}\left\{\left(\frac{3}{4}Ma + \frac{I_0}{a}\right)^2 v^2 + \frac{3}{2}M\,g\,a\,I - 2Mg\,a\,I\sin\theta\right\}$$

円板の点 C まわりの角速度$\dot{\theta}$は，円板が点 C に接触する瞬間が最大で，θが$\frac{1}{2}\pi$となるときに最小となる．そのため，$\theta = \frac{1}{2}\pi$で$\sin\theta = 1$となるため，それと同時に$\dot{\theta} = 0$とれば，段差をちょうど上がり切る．その速度を求めると，以下の式を満たす．

$$\left(\frac{3}{4}Ma + \frac{I_0}{a}\right)^2 v^2 - \frac{1}{2}M\,g\,a\,I = 0$$

$v > 0$であるため，以下のとおりとなる．

$$v = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} M\ g\ a\ I}}{\frac{3}{4} Ma + \frac{I_0}{a}}$$

この速度より早ければ良いので，vの条件は，以下のとおりとなる．

$$v \geqq \frac{\sqrt{\frac{1}{2} M\ g\ a\ I}}{\frac{3}{4} Ma + \frac{I_0}{a}}$$

$I_0 = \frac{1}{2} Ma^2$，$I = \frac{3}{2} Ma^2$を代入して，

$$v \geqq \frac{2\sqrt{3}}{5} \sqrt{ga}$$

	物理学問題 2
出題意図	鏡像法を用いた電場の求め方および誘電体界面での電場の境界条件の理解を問う。
解答例	(1) 全体の静電ポテンシャルは以下のようになる。

(1) 全体の静電ポテンシャルは以下のようになる。

$$-\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{-1/2}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1}\{x^2+y^2+(z+d)^2\}^{-1/2}$$

x,y,z方向についてそれぞれ偏微分し，次のようになる。

$$E_{1x}(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{x}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{x}{\{x^2+y^2+(z+d)^2\}^{3/2}}$$

$$E_{1y}(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{y}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{y}{\{x^2+y^2+(z+d)^2\}^{3/2}}$$

$$E_{1z}(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_1}\frac{z-d}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{z+d}{\{x^2+y^2+(z+d)^2\}^{3/2}}$$

$z=0$を代入し，次の解を得る。

$$E_{1x}(x,y,0)=\frac{q+q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{x}{\{x^2+y^2+d^2\}^{3/2}}$$

$$E_{1y}(x,y,0)=\frac{q+q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{y}{\{x^2+y^2+d^2\}^{3/2}}$$

$$E_{1z}(x,y,0)=-\frac{q-q'}{4\pi\varepsilon_1}\frac{d}{\{x^2+y^2+d^2\}^{3/2}}$$

(2) 全体の静電ポテンシャルは以下のようになる。

$$-\phi(x,y,z)=\frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{-1/2}$$

x,y,z方向についてそれぞれ偏微分し，次のようになる。

$$E_{2x}(x,y,z)=\frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\frac{x}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}}$$

$$E_{2y}(x,y,z)=\frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\frac{y}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}}$$

$$E_{2z}(x,y,z)=\frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\frac{z-d}{\{x^2+y^2+(z-d)^2\}^{3/2}}$$

$z=0$を代入し，次の解を得る。

$$E_{2x}(x,y,0)=\frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\frac{x}{\{x^2+y^2+d^2\}^{3/2}}$$

$$E_{2y}(x,y,0)=\frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\frac{y}{\{x^2+y^2+d^2\}^{3/2}}$$

$$E_{2z}(x,y,0)=-\frac{q"}{4\pi\varepsilon_2}\frac{d}{\{x^2+y^2+d^2\}^{3/2}}$$

(3) $E_{1x}(x,y,0)=E_{2x}(x,y,0)$

(4) $\varepsilon_1 E_{1z}(x,y,0)=\varepsilon_2 E_{2z}(x,y,0)$

(5) $q-q'=q"$, $\frac{1}{\varepsilon_1}(q+q')=\frac{1}{\varepsilon_2}q"$より，

$$q'=-\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)q,\quad q"=\left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)q$$

(6) $\varepsilon_1>\varepsilon_2$および$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{E_{2z}(x,y,0)}{E_{1z}(x,y,0)}>1$より，$E_{2z}(x,y,0)>E_{1z}(x,y,0)$

図 4(b)が正しい。((3)の結果および、z 成分の大小関係より、領域 1 の電気力線が界面に入射するときの傾きは領域 2 の電気力線の傾きより小さいため。)