令和3年度

試験名：学群編入学試験　　　　【理工 学群 社会工 学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
	別紙のとおり

【問題１略解】 (1) 第１列に他の列を加えた後, 第 n 行を他の行から差し引く.

$$\det A = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & \cdots & b & a \\ a+(n-1)b & b & & & a & b \\ \vdots & & & a & & \vdots \\ \vdots & & a & & & \vdots \\ a+(n-1)b & a & & & b & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & \cdots & b & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a-b \\ 0 & 0 & & & a-b & 0 \\ \vdots & & & a-b & & \vdots \\ \vdots & & a-b & & & \vdots \\ 0 & a-b & & & 0 & 0 \\ a+(n-1)b & b & \cdots & \cdots & b & b \end{vmatrix}$$

第１列について余因子展開を繰り返し,

$$\begin{aligned} \det A &= \{a+(n-1)b\}(a-b)^{n-1}(-1)^{\sum_{i=2}^{n}(i+1)} \\ &= \{a+(n-1)b\}(a-b)^{n-1}(-1)^{\frac{n(n+3)}{2}-2}. \end{aligned}$$

(2) $b=a$, もしくは $b=\frac{-a}{n-1}$.

(3) $b=a$ のとき, 階数は 1.
$b=\frac{-a}{n-1}$ のとき, $x=\frac{-1}{n-1}\neq 0$ とおくと,

$$A = a\begin{bmatrix} x & x & \cdots & \cdots & x & 1 \\ x & x & & & 1 & x \\ \vdots & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ x & 1 & & & x & x \\ 1 & x & \cdots & \cdots & x & x \end{bmatrix}$$

第1列に他の列を加えた後, 第 n 行を他の行から差し引く.

$$\longrightarrow a\begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & \cdots & x & 1 \\ 0 & x & & & 1 & x \\ \vdots & & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \vdots \\ 0 & 1 & & & x & x \\ 0 & x & \cdots & \cdots & x & x \end{bmatrix} \longrightarrow a\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & & & 1-x & 0 \\ \vdots & & & 1-x & & \vdots \\ \vdots & & 1-x & & & \vdots \\ 0 & 1-x & & & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & \cdots & x & x \end{bmatrix}$$

第1から $n-1$ 行をそれぞれ $\frac{x}{x-1}$ 倍 $(x-1\neq 0)$ して第 n 行に加え,

$$\longrightarrow a\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & & & 1-x & 0 \\ \vdots & & & 1-x & & \vdots \\ \vdots & & 1-x & & & \vdots \\ 0 & 1-x & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

階数は $n-1$.

【問題2略解】 (1) $f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\4\end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. 従って, $H=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&1&0\\4&0&0\end{bmatrix}$.

(2) $|H-\lambda E|=-(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-2)$. 故に, 固有値 $\lambda=-2,1,2$.

固有値 -2 に対応する固有空間 S_{-2}: $(H+2E)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ により, $S_{-2}=\left\{\begin{bmatrix}-3k\\k\\6k\end{bmatrix}:k\in\mathbb{R}\right\}$.

固有値1に対応する固有空間S_1: $(H-E)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

により，$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}$.

固有値2に対応する固有空間S_2: $(H-2E)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

により，$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} k \\ k \\ 2k \end{bmatrix} : k \in \mathbb{R} \right\}$.

(3) $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$は各々，固有値$-2, 1, 2$に対応する線形独立な固有ベクトルである．$P = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$とおくと，

$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/6 & 0 & 1/12 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$, $P^{-1}HP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$．求める$\mathbb{R}^3$の基底の一つは$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$である.

【問題３略解】 (1) $\phi(x) = F(x, f(x))$とし, $\phi(x) = 0$を両辺xで微分すると,

$$\phi'(x) = 2f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) - 3x^2 = 0.$$

陰関数の１次導関数は,

$$f'(x) = \frac{3x^2 - f(x)}{2f(x) + x}.$$

$f'(x)=0$ のとき, $f(x)=3x^2$.　これを, もとの関係式 $\phi(x)=0$ に代入すると $\phi(x)=x^3(9x+2)=0$ より, 候補点 $(x,f(x))$ は, $(x,f(x))=(0,0),(\frac{-2}{9},\frac{4}{27})$.

関数 $F(x,y)$ の y についての偏導関数は, $F_y(x,y)=2y+x$ であるから, $F_y(\frac{-2}{9},\frac{4}{27})=\frac{2}{27}\neq 0$. 他方で, 点 $(0,0)$ では, $F_y(0,0)=0$ であり, 特異点となる.

$\phi'(x)=0$ の両辺を x で微分した $\phi''(x)=0$ より, $f''(x)=\frac{6x-2\{f'(x)\}^2-f'(x)}{2f(x)+x}$. $f'(x)=0$ のとき, $f''(x)=\frac{6}{6x+1}$ であるから, $f''(\frac{-2}{9})=-18<0$. よって, 点 $(x,f(x))=(\frac{-2}{9},\frac{4}{27})$ で極大値.

(2) $F(x,y)=0$ 上の点 $(0,0)$ の近傍の点を $(0+h,0+k)$ とすると, テイラーの定理より, $F(0+h,0+k)=F(0,0)+F_x(0,0)h+F_y(0,0)+\frac{1}{2}[F_{xx}(0,0)h^2+2F_{xy}(0,0)hk+F_{yy}(0,0)]k^2+R(h,k)$. 但し, $R(h,k)$ は剰余項とする.

$F(x,y)=0$, $F_x(x,y)=y-3x^2$, $F_y(x,y)=2y+x$. 点 $(0,0)$ は特異点で, $F_x(0,0)=0, F_y(0,0)=0$ であるから, $F(0+h,0+k)$ は $\frac{1}{2}[F_{xx}(0,0)h^2+2F_{xy}(0,0)hk+F_{yy}(0,0)]k^2$ にほぼ等しい. また, $F_{xx}(x,y)=-6x$ より, $F_{xx}(0,0)=0$, かつ $F_{yy}(x,y)=$

$2, F_{xy}(x,y)=1$ である．以上より，$F(0+h,0+k)$ は $k(h+k)$ にほぼ等しい．

よって，点 $(0,0)$ の近傍で $F(x,y)=0$ は $y(x+y)=0$ で近似できる．求める直線は，$y=-x, y=0$.

【問題４略解】 (1) $\lim_{x\to+0}\log g(x) = \lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to+0}(-x)=0$. 従って，$\lim_{x\to+0} g(x)=1$.

(2) $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と極座標変換すると，$dxdy = rdrd\theta$ であり，与えられた D は $D'=\{(r,\theta):0<r\leq 1, 0\leq\theta\leq\pi/2\}$ に１対１に移される．領域 D 上で関数 $f(x,y)$ は,

$$f(x,y)=\frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\leq 0$$

となるので，D' の増大列 $\{D_n\}$ として

$$D_n=\{(r,\theta):1/n\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq\pi/2\}$$

を選ぶと,

$$
\begin{aligned}
& \iint_D \frac{x\log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dxdy \\
= \ & \iint_{D'} \frac{r^2\cos\theta\log r^2}{r^2}drd\theta \\
= \ & \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} 2\cos\theta\log r dr d\theta \\
= \ & 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta\int_{+0}^1 \log r dr \\
= \ & 2[\sin\theta]_0^{\pi/2}\times[r\log r - r]_{+0}^1 \\
= \ & 2\times\{-1-\lim_{r\to+0}(r\log r - r)\} \\
= \ & -2.
\end{aligned}
$$

【問題５略解】 (1)

$$
Prob(|X-\mu|\geq k) = \int_{|X-\mu|\geq k} f(x)dx
$$

$\frac{|X-\mu|}{k}\geq 1$ より,

$$
\begin{aligned}
& \leq \int_{|X-\mu|\geq k}\left(\frac{|X-\mu|}{k}\right)^2 f(x)dx \\
& \leq \frac{1}{k^2}\int (x-\mu)^2 f(x)dx = \frac{\sigma^2}{k^2}
\end{aligned}
$$

(2) $E(X)=2, E(X^2)=9$ なので, 分散 $V(X)=5$.

$Prob(-1<X<5) = Prob(|X-2|<3)$

$= 1 - Prob(|X-2| \geq 3)$. (1) より, $Prob(|X-2| \geq 3) \leq \frac{5}{9}$ であるから, $Prob(-1 < X < 5) \geq \frac{4}{9}$.

(3) 正規分布の再生性より, $\bar{X} \sim N(2, \frac{1}{4})$.

$Prob(|\bar{X}-2| \geq \frac{3}{4}) = Prob(\frac{|\bar{X}-2|}{\frac{1}{2}} \geq 1.5)$

$= Prob(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma} \geq 1.5) = (0.5 - 0.4332) \times 2 = 0.1336.$

$Prob(|\bar{X}-2| < \frac{3}{4}) = 1 - Prob(|\bar{X}-2| \geq \frac{3}{4}) = 0.8664.$

他方, (1) の結果より, $Prob(|\bar{X}-2| \geq \frac{3}{4}) \leq \frac{4}{9}$.

$Prob(|\bar{X}-2| < \frac{3}{4}) \geq \frac{5}{9} = 0.555...$ であるので, (1) による下限は緩いものとなっている.

【問題６略解】 (1) 等分散検定問題は

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2, \qquad H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

となる．A 大学と B 大学の標本分散はそれぞれ s_A^2, s_B^2 とすると，$s_A^2 = 776/8 = 97, s_B^2 = 2304/6 = 384$ である．$s_B^2 > s_A^2$ であるから，$s_B^2/s_A^2 < F_{0.025}(6,8)$ ならば帰無仮説は棄却されず，等分散を認める．実際，$s_B^2/s_A^2 = 3.959$ であり，F 分布表から $F_{0.025}(6,8) = 4.65$ となるから，$s_B^2/s_A^2 < F_{0.025}(6,8)$ が成り立

つ．よって，点数のばらつきはA大学，B大学で等しいと見なしてよい．

(2) 検定問題は

$$H_0 : \mu_A = \mu_B, \qquad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

である．A大学とB大学の標本平均はそれぞれ $\bar{x} = 75, \bar{y} = 60$ である．また，二つの標本分散 s_A^2 と s_B^2 を合わせた分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{(9-1) \times 97 + (7-1) \times 384}{9+7-2} = \frac{3080}{14} = 220$$

である．この時，検定統計量 t の値は

$$t = \frac{75-60}{\sqrt{(1/9+1/7) \times 220}} = \frac{45\sqrt{7}}{8\sqrt{5}\sqrt{11}} = 2.007$$

となる．一方，自由度14の t 分布の両側5% 点は $t_{0.05}(14) = 2.145$ である．よって，$t < t_{0.05}(14)$ より帰無仮説 H_0 は棄却されず，A大学とB大学で数学の学力に差があると言えない．