令和6年度

試験名：私費外国人留学生入試　　　　【 理工学群　工学システム学類 】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 1	（解答例） (1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\cos^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos^2 2x}{4}\right)dx$ $\displaystyle=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos 4x}{2}\right)dx=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}x-\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{8}$ (2) $\displaystyle\int_1^4\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}dx=\int_1^4\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)}dx=2\int_1^4\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)}dx=2\int_1^4\frac{(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)}dx$ $\displaystyle=2\left[\log(\sqrt{x}+1)\right]_1^4=2(\log 3-\log 2)=2\log\frac{3}{2}=\log\frac{9}{4}$ (3) $\displaystyle\int_1^e 7^{\log x}\,dx=\int_0^1 7^t e^t dt=\int_0^1(7e)^t dt=\left[\frac{(7e)^t}{\log 7e}\right]_0^1=\frac{7e-1}{\log 7e}=\frac{7e-1}{\log 7+1}$

令和6年度

試験名：私費外国人留学生入試　　　　【 理工学群　工学システム学類 】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題 2	(解答例)

(1) tan の 2 倍角の公式より

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{120}{119}$$

(2) tan の加法定理より，以下のように求まる．

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\alpha \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\cdot 1} = \frac{1}{239}$$

(3) $f(t) = \tan t - t$ とおくと，$f'(t) = \frac{1}{\cos^2 t} - 1$ であり，$0 < t < \pi/2$ では $f'(t) > 0$ であるので，この区間で $f(t)$ は単調増加である．$f(0) = 0$ であるから，この区間では $f(t) = \tan t - t > 0$ であり，$t < \tan t$ がいえる．

(4) (2) と $y = \tan x$ の単調増加性より $0 < \pi/4 < 4\alpha < \pi/3$ であるから，(3) より $4\alpha - \pi/4 < \frac{1}{239}$ がいえ，ここから $\pi > 16\alpha - \frac{4}{239}$ が導かれる．実際に割り算をすることで $\frac{4}{239} = 0.01673\cdots < 0.0168$ となるから，$\pi > 3.15832 - 0.0168 = 3.14152 > 3.1415$ となる．

(5) cos の加法定理より

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

また，tan の半角の公式より

$$\tan^2\frac{\pi}{24} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{1+\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$

である．$\tan\frac{\pi}{24} > 0$ より，$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}}}$.

【注】上式の根号の中の値は，

$$\frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4+\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})} = \frac{(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{16-(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}$$
$$= \frac{(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{8-2\sqrt{12}} = \frac{(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}$$

と変形できるので，$4-\sqrt{2}-\sqrt{6} > 0$ と合わせると $\tan\frac{\pi}{24} = \frac{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ となる．さらに分母を有理化すると $\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6}+\sqrt{2}-2-\sqrt{3}$ が得られる．どの形でも正解．

問題 2 の続き	(6) $n = 24$ のとき，題意の多角形は正 24 角形になり，正 24 角形の各頂点とその内接円の中心を結ぶと，合同な二等辺三角形が 24 個できる．この二等辺三角形の頂角は $\frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$ であり，頂角を挟む 2 辺の長さは $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{24}}$ となるから，正 24 角形 K_{24} の面積 S_{24} は，sin の 2 倍角の公式を使って $$\begin{aligned} S_{24} &= 24 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{24}}\right)^2 \sin\frac{\pi}{12} \\ &= 24 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{24}}\right)^2 2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24} \\ &= 24\tan\frac{\pi}{24} \end{aligned}$$ となる． (7) $n = 60$ のときも (6) と同様に考える．合同な二等辺三角形が 60 個できて，1 つの二等辺三角形の面積は $\tan\frac{\pi}{60}$ であるから，正 60 角形の面積は $S_{60} = 60\tan\frac{\pi}{60}$ である．明らかに，正 60 角形の内接円の面積 π は S_{60} より小さいから $\pi < 60\tan\frac{\pi}{60} < 60\times 0.05241 = 3.1446$ がいえる．

令和6年度

試験名：私費外国人留学生入試　　　　【 理工学群　工学システム学類 】

区　　分	標 準 的 な 解 答 例 又 は 出 題 意 図
問題 3	(解答例) (1)　$\dfrac{(m+M)g}{k}$ (2)　中心位置：$\dfrac{(m+M)(g+\alpha)}{k}$ 振幅　　：$\dfrac{(m+M)\alpha}{k}$ (3)　$2\pi\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$ (4)　台 A の運動方程式　：$m\beta=-kx+mg+N$ 物体 B の運動方程式：$M\beta=Mg-N$ (5)　$x=0$ (6)　$\sqrt{\dfrac{3m}{k}}\,g$ (7)　1.5