

筑波大学 理工学群 工学システム学類

令和6年度 私費外国人留学生 入学試験

小論文問題

(90分)

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、この表紙を含めて3ページあります。
3. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に、「学群・学類」、「氏名」、「受験番号」を記入してください。
4. 問題は3問、解答用紙は3枚あります。各問題の解答は、それぞれ1枚の解答用紙に記入してください。裏面を使用しても構いません。
5. 解答用紙の上部の 内には、問題番号を明記してください。

問題 1

次の定積分を求めよ。導出過程も示すこと。ただし、 \log は自然対数とする。

$$(1) \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

$$(2) \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \, dx$$

$$(3) \int_1^e 7^{\log x} \, dx$$

問題 2

円周率 π に関する以下の (A), (B) にそれぞれ答えよ。

(A) α を $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ かつ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす角とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\tan 2\alpha$ および $\tan 4\alpha$ の値を求めよ。

(2) $\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ。

(3) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ を満たすすべての t に対して $t < \tan t$ が成り立つことを示せ。

(4) $\pi > 3.1415$ であることを示せ。ただし次の不等式を使ってよい。

$$\frac{3.15832}{4} < 4\alpha < \frac{3.15833}{4}$$

(B) 次に、 $n \geq 3$ を正整数として、半径 1 の円に外接する正 n 角形 K_n を考える。以下の問いに答えよ。

(5) $\cos \frac{\pi}{12}$ および $\tan \frac{\pi}{24}$ の値を求めよ。二重根号は $\tan \frac{\pi}{24}$ に限り残してよい。

(6) 正 24 角形 K_{24} の面積 S_{24} を $\tan \frac{\pi}{24}$ を用いて表せ。

(7) 正 60 角形 K_{60} の面積 S_{60} を考えることにより、 $\pi < 3.1446$ であることを示せ。ただし次の不等式を使ってよい。

$$0.05240 < \tan \frac{\pi}{60} < 0.05241$$

問題3

図1のように、エレベーターが止まっている状態で、床に固定された質量の無視できるばね（ばね定数 k ）の上に、厚さの無視できる質量 m の台 A を固定した。その上に大きさの無視できる質量 M の物体 B を静かに置いたところ、台 A と物体 B はつり合いの位置で静止した。時刻 t_0 でエレベーターが一定の加速度（大きさ α ）で上昇を始めたところ、台 A と物体 B は単振動を始めた。しばらくして、エレベーター内の観測者は台 A と物体 B の運動を止めて、単振動の中心位置で台 A と物体 B を手でおさえて静止させた。その後、時刻 t_1 でエレベーターは加速をやめ、時刻 t_1 での速度を保ったまま上昇した。観測者が静かに手を離れたところ、台 A と物体 B は再び運動を始めた。以下では、エレベーター内に固定された観測者から見た運動を考え、空気による抵抗は無視する。また、ばねの自然長の位置を原点 O とし、鉛直下向き（ばねが縮む向き）を x 軸の正方向とする。重力加速度の大きさを g とし、以下の問いに答えよ。

- (1) エレベーターが止まっているときのつり合いの位置を求めよ。
- (2) エレベーターが上昇を始めたときの単振動の中心位置と振幅を求めよ。
- (3) エレベーターが上昇を始めたときの単振動の周期を求めよ。
- (4) 時刻 t_1 直後における台 A と物体 B の運動方程式をそれぞれ表せ。ただし、台 A と物体 B の加速度を β とし、台 A と物体 B の間にはたらく垂直抗力を N とする。

次に $M = 5m$ 、 $\alpha = \sqrt{1.5}g$ の場合について、時刻 t_1 以降における台 A と物体 B の運動を考える。時刻 t_1 以後に台 A と物体 B はある位置で離れ、それぞれ最高点に達してから再びその離れた位置に戻ってきた。

- (5) 台 A と物体 B が離れる位置を求めよ。
- (6) 台 A と物体 B が離れるときの物体 B の速さを求めよ。
- (7) 台 A が達する最高点の高さに対する、物体 B が達する最高点の高さの比を求めよ。

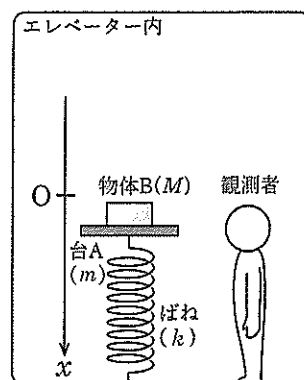


図1