令和６年度

# 理工学群数学類
# 私費外国人留学生入試

# 小　論　文
# 試　験　問　題

## 注意事項

① 問題Ｉ ～問題 III は別々の解答用紙に日本語で解答してください。

② 試験時間は９０分です。

**問題 I**　実数 $a$ に対して，２つの放物線 $C_1, C_2$ を

$$C_1 : y = x^2 + ax + a - a^2,\quad C_2 : y = -x^2 - a^2x + 2$$

により定める。

(1) $C_1$ と $C_2$ は相異なる 2 点で交わることを示せ。

(2) $C_1$ と $C_2$ の 2 つの交点を通る直線を $\ell$ とする。$\ell$ の方程式を求めよ。また，$\ell$ が $a$ の値に関係なく必ず通る定点 P の座標を求めよ。

(3) (2) で求めた点 P が $C_1$ と $C_2$ の 2 つの交点の中点となるような $a$ の値を求めよ。

**問題 II**　以下の問いに答えよ。

(1) $a, b, c, d$ は実数で，$a > c$ を満たす。整式 $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ について，$x^4 + 4 = f(x)g(x)$ が成り立つとき，$a, b, c, d$ の値を求めよ。

(2) $f(x), g(x)$ は (1) のものとする。

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{x^4 + 4} = \frac{p(x)}{f(x)} + \frac{q(x)}{g(x)}$$

を満たす 1 次以下の整式 $p(x), q(x)$ を求めよ。

(3) 以下の定積分を求めよ。

$$\int_{-1}^{0} \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 2}{x^4 + 4}\,dx$$

**問題 III**　関数 $f(x)$ を以下で定める。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

また，実数 $a, b$ に対して，関数 $g(x)$ を $g(x) = f(x-a)f(b-x)$ で定める。

(1) $g(x)$ の最大値が 1 となるような $(a, b)$ の範囲を $ab$ 平面に図示せよ。

(2) $g(x) + g(-x)$ の最大値が 1 となるような $(a, b)$ の範囲を $ab$ 平面に図示せよ。

(3) $g(x) + g(-x)$ の最大値が 2 となるような $(a, b)$ の範囲を $ab$ 平面に図示せよ。

(4) 関数 $h(x)$ を $h(x) = f(x-a) + f(x-b)$ で定める。$g(h(x))$ の最大値が 1 となるような $(a, b)$ の範囲を $ab$ 平面に図示せよ。