筑波大学理工学群　工学システム学類

令和７年度編入学試験

学力検査問題

（150 分）

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は，この表紙を含めて６ページあり，専門科目（数学，物理学）の各問題がまとめられています。
3. 問題数は，数学が２問，物理学が２問です。
4. 解答用紙と下書き用紙の定められた欄に，「学群・学類」，「氏名」，「受験番号」を記入してください。
5. 解答に際しては，数学，物理学の各問題で，別々の解答用紙を用いてください。解答用紙は，裏面を用いても構いません。
6. 解答用紙の上部の $\boxed{}$ 内に，数学問題１，数学問題２，物理学問題１，物理学問題２と記入し，各問題に小問がある場合には，それらの小問の解答を全て要領良く記述してください。

数学１　試験問題

１．以下の問いに答えよ。

(1) 次の有理関数の不定積分を求めよ。

$$\frac{7}{2x^2+5x-3}$$

(2) 次のカテナリー（懸垂線）の長さを求めよ。ただし$0 \leq x \leq a$とする。

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

(3) 2 つの曲線 $y=x$ と $y=x^2$ で囲まれた領域を D とする。このとき次の二重積分を求めよ。

$$\iint_D xydxdy$$

(4) 関数 $z=\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$ が描く曲面 S において，点$(1,1,\ e^{-1})$における接平面の方程式を求めよ。

２．以下の問いに答えよ。ただし，n は自然数とする。

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}$$

(2) (1)の不等式と次の不等式

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx>\frac{2}{n\pi}$$

が成り立つことを用いて，次の広義積分が無限大に発散することを示せ。

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

数学 2　試験問題

1. 次の連立方程式について，aを実数の定数として以下の問いに答えよ。

$$\begin{aligned} x-y-z &= -1 \\ ax+2y+3z &= 3 \\ 3x+y+az &= 2 \end{aligned}$$

(1) 連立方程式の解が 1 組に決まる条件を係数行列の行列式を用いて示せ。また，そのときのaの条件を示せ。

(2) 解がない場合のaの値を求めよ。

(3) 解が一意に定まらない場合のaの値を求めよ。またその解が，任意定数tを用いて$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \\ 0 \end{pmatrix}$で与えられる場合，定数$c_1, c_2, c_3, c_4$を求めよ。

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ。ただし，θは実数の定数である。

(1) 行列Aの転置行列を ${}^tA$で表す場合，${}^tAA$を求めよ。

(2) 行列Aの固有値λ_1，λ_2を求めよ。ただし，固有値λ_1，λ_2は複素数である。

(3) 行列Aの固有値λ_1，λ_2に対する固有ベクトル$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$を求めよ。

(4) A^n　($n = 1, 2, 3, \ldots$) を求めよ。

物理学１　試験問題

惑星の周りを惑星探査機が平面内で運動している状況を考える。惑星は，図１のように，xy 平面内の原点 O に位置するとし，時刻tにおける探査機の位置を(x,y)，惑星から探査機までの距離をrとする。探査機には惑星から，惑星と探査機を結ぶ直線に沿って力$\boldsymbol{F}$が働く。力$\boldsymbol{F}$の大きさは，関数$f(r)$の絶対値 $|f(r)|$ であり，$f(r)>0$のときは惑星と反対の向きに，$f(r)<0$のときは惑星の向きに働く。惑星の質量をM，探査機の質量を$m\ (\ll M)$とし，惑星と探査機の大きさは無視でき，惑星は原点から動かないものとする。探査機に働く$\boldsymbol{F}$以外の力は無視できるとして，以下の問いに答えよ。

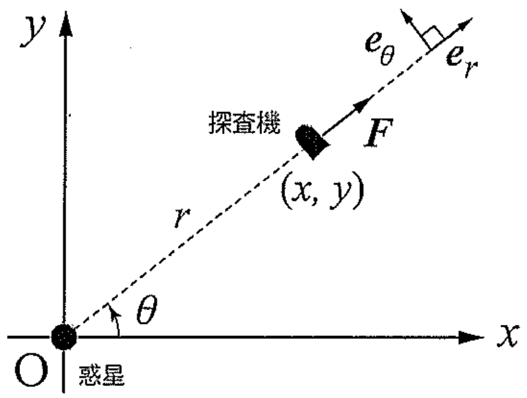

図１

(1) 時刻tにおける原点と探査機を結ぶ線分とx軸のなす角θを用いて，探査機の位置を$(x,y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$と表すとき，探査機の運動エネルギー$K$を，$m,r,\dot{r},\theta,\dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表せ。ここに $\dot{r}=\frac{dr}{dt}$，$\dot{\theta}=\frac{d\theta}{dt}$ である。

(2) 探査機の加速度を次の形に表すとき，空欄アに入る数式をできるだけ簡単な形で表せ。$r,\dot{r},\ddot{r},\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}$ のうち必要なものを用いること。ここに $\ddot{r}=\frac{d^2r}{dt^2}$，$\ddot{\theta}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$ である。

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d^2x}{dt^2}\\ \frac{d^2y}{dt^2}\end{pmatrix}=\boxed{\quad ア \quad}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

(3) 探査機に関する運動方程式を，e_r方向およびe_θ方向に分けて書け。ここに $e_r=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ は動径方向の単位ベクトル，$e_\theta=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$ はe_rに直交する単位ベクトルである。

(4) 探査機の面積速度 $h=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$が時刻$t$によらないことを示せ。

（次ページに続く）

次に，$f(r) = -\frac{GMm}{r^2}$ とした場合を考える（Gは万有引力定数）。探査機は，図 2 に示すように，無限遠の点 A から双曲線軌道を描きながら惑星に近づき，惑星の左側のx軸上の点 B を通って，別の無限遠の点 C に到達する。OB 間の距離をl，惑星と双曲線の漸近線の距離をd，x軸と漸近線のなす角をφとして，以下の問いに答えよ。なお，探査機は点 A と点 C の近くでは漸近線上を動いていると考えてよい。

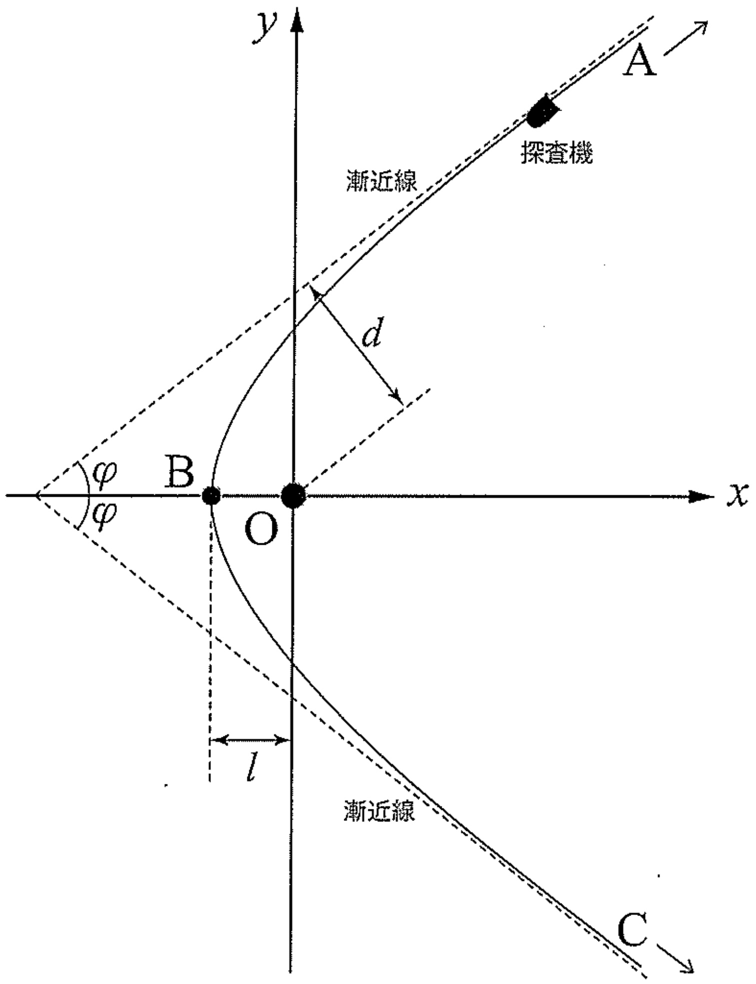

図 2

(5) lを，G, M, m, d, v_0のうち必要なものを用いて表せ。ただし，$h = \frac{1}{2}v_0 d = \frac{1}{2}v_1 l$であることを用いて良い。ここで$v_0, v_1$は，それぞれ点 A，点 B における探査機の速さとする。

(6) 探査機が点 A から点 C に至るまでに，惑星が探査機に与える力積のx成分とy成分を，それぞれm, v_0, φ のうち必要なものを用いて表せ。

物理学 2　試験問題

図 1 のような真空中におかれたz方向に無限に延びる内半径a, 外半径b ($a < b$) の円筒がある。真空の誘電率と透磁率をε_0, μ_0とし，任意の点 P を円柱座標系(r, θ, z)で表すとき，以下の問いに答えよ。

(1) 円筒に定常電流Iが$+z$方向に流れたとき, 円筒の内側 ($r < a$) および外側 ($r > b$) に発生する静磁場の磁束密度$\boldsymbol{B}$の大きさを求め，$\boldsymbol{B}$の向きを答えよ。

次に，円筒が誘電率εの誘電体であるとし，円筒の内部（$a \le r \le b$）に密度ρの電荷が一様に分布しているときを考える。点 P における静電ポテンシャルをϕとする。

(2) 円筒の内側，内部，外側の静電ポテンシャルについてのポアソン方程式を示せ。

(3) 円筒の外側（$r > b$）の静電ポテンシャルを求めよ。積分定数は残したままでよい。ただし，円柱座標系における以下の関係式（2 階微分可能な任意の関数$f(r, \theta, z)$がrにのみ依存するときに成立する）を使用してよい。

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{df(r)}{dr}\right]$$

(4) 円筒の内部（$a \le r \le b$）および内側（$r < a$）の静電ポテンシャルを求めよ。積分定数は残したままでよい。

(5) ポアソン方程式の解は適切な境界条件を与えれば一意に決定される。静電ポテンシャルの基準を $r = b$ のときに $\phi = 0$ としたとき，解を一意に決定するための $r = a,\ b$ における境界条件を ϕ, $d\phi/dr$, ε, ε_0 を使って答えよ。

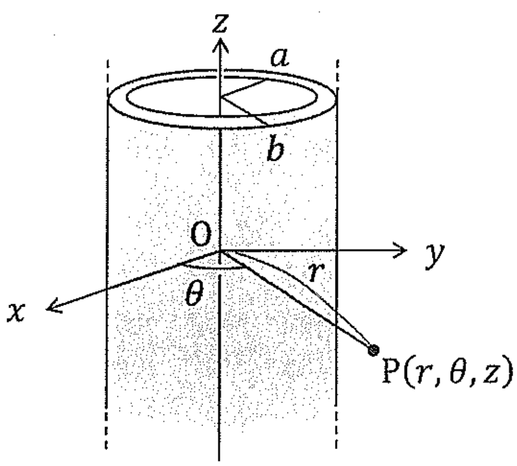

図 1