

筑波大学理工学群社会工学類

令和7年度

編入学試験

学力検査問題

(数学)

【注意事項】

1. 試験開始の合図があるまで、この問題の中身を見てはいけません。
2. すべての解答用紙（罫紙）と下書き用紙の定められた欄に、志望する「学群・学類」、「氏名」、「受験番号」をすべて記入すること。
3. 解答用紙は6枚あります。
解答用紙1枚目上部の細長い四角の枠内に「1」と記入すること。
解答用紙2枚目上部の細長い四角の枠内に「2」と記入すること。
解答用紙3枚目上部の細長い四角の枠内に「3」と記入すること。
解答用紙4枚目上部の細長い四角の枠内に「4」と記入すること。
解答用紙5枚目上部の細長い四角の枠内に「5」と記入すること。
解答用紙6枚目上部の細長い四角の枠内に「6」と記入すること。
4. 問題は6問あります。
問題1を解答用紙1枚目に解答しなさい。
問題2を解答用紙2枚目に解答しなさい。
問題3を解答用紙3枚目に解答しなさい。
問題4を解答用紙4枚目に解答しなさい。
問題5を解答用紙5枚目に解答しなさい。
問題6を解答用紙6枚目に解答しなさい。
5. 解答にあたっては、導出過程も示すこと。
6. 必要に応じて付表を参照すること。
7. 解答用紙の裏面を使用しても構いません。
8. 試験終了後、問題冊子と解答用紙、下書き用紙を別々に集めます。

問題 1 2次曲線 $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10\sqrt{6}x - 2\sqrt{6}y + 18 = 0$ について考える。

- (1) $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし, 上記の2次曲線を ${}^t z A z + 2 {}^t b z + c = 0$ と表す。対称行列 A , ベクトル b , スカラー c を求めよ。ただし, ベクトル x の転置は ${}^t x$ と表す。
- (2) (1) で求めた行列 A の固有値および長さ1の固有ベクトルを求めよ。
- (3) (2) で求めた固有ベクトルを横に並べた行列 P を用いて, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ という変数変換を行い, 2次曲線を新たな変数 X, Y を用いて表せ。
- (4) 変数 X, Y で表された2次曲線を楕円 $\frac{s^2}{a} + \frac{t^2}{b} = 1$ の形式 (a, b は正の定数) に変形し, 新たな変数 s, t を変数 X, Y で表せ。
- (5) 変数 x, y を変数 s, t に変換する変数変換を「回転 (または鏡映)」および「平行移動」の語を用いて説明せよ。

問題 2 (1) 次の実正方行列 A の行列式を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

- (2) (1) の行列 A が正則となる条件を a, b, c, d を用いて述べよ。
- (3) 2次元平面上の4つの点 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3, 4$) を通る次のような多項式 $y = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + h_3 x^3$ を決める問題を考える。 y 座標および多項式の係数についての列ベクトルを, それぞれ, $\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $\mathbf{h} = {}^t(h_0, h_1, h_2, h_3)$ と定めるとき, 多項式が4つの点すべてを通る条件を \mathbf{y}, \mathbf{h} と4次正方行列を用いて表せ。ただし, ベクトル z の転置は ${}^t z$ と表す。
- (4) (3) の x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) がすべて異なるとき, 多項式が一意に決まることを示せ。

問題3 区間 $[0, u]$ 上で定義された次の連続関数 $f(x), g(x)$ を考える.

$$f(x) = \left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{\beta + x^2}} \right)^{-1}, \quad g(x) = x - f(x)$$

ただし, α, β は正の定数である. また, $f(u) < u$ であると仮定する.

- (1) 区間 $(0, u)$ において $0 < f'(x) < \frac{u}{\sqrt{\beta + u^2}}$ である. このことを示せ.
- (2) $g(x) = 0$ を満たす $x = x^*$ が区間 $(0, u)$ に存在し, かつ, そうした x^* が唯一であることを示せ.

次に, 区間 $(x^*, u]$ 内の任意の初期値 x_0 から次のようにして生成される数列 $\{x_n\}$ を考える.

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- (3) $x^* < x_{n+1} < x_n$ であることを示せ.
- (4) 数列 $\{x_n\}$ が極限値を持ち, かつ, その極限値が x^* となることを示せ.

問題4 次の関数を考える. ただし, e はネイピア数である.

$$f(x, y) = e^{\alpha x} \sin(\beta y) \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0)$$

- (1) 関数 $z = f(x, y)$ の点 $(0, 0)$ における接平面を求めよ.
- (2) 関数 $z = f(x, y)$ の点 $(0, 0)$ におけるテイラー展開を3次の項まで求めよ.

次の関数を考える.

$$g(x, y) = -x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 4x + \frac{1}{2}y - \frac{17}{4}$$

- (3) 関数 g の勾配とヘッセ行列を示せ.
- (4) 関数 g のヘッセ行列の定値符号 (正定値, 負定値, 不定値のいずれか) を答えよ. その理由も述べること.
- (5) 関数 g の極値を求めよ.

問題5 確率 p で成功し、確率 $1 - p$ で失敗する独立な実験を n 回繰り返す。 X_i は i 回目の実験に成功したときに $X_i = 1$ 、失敗したときに $X_i = 0$ となる確率変数である。 $P(E)$ は事象 E が起こる確率を表す。

- (1) 以下の確率変数 Y は n 回の実験における成功割合を表す。確率変数 Y の期待値と分散を求めよ。

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- (2) 確率 p_1, p_2, \dots, p_n で値 z_1, z_2, \dots, z_n をとる確率変数 Z の期待値を μ 、分散を σ^2 とする。ただし、 $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ 、 $p_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とし、 $\sigma^2 > 0$ とする。このとき、実数 $t > 0$ に対して、分散 σ^2 の定義式を用いて以下の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$P(|Z - \mu| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}$$

- (3) 独立な実験を 2500 回繰り返したとき、0.99 以上の確率で成功割合 Y が期待値 ± 0.1 の範囲に収まることを、(2) の不等式を用いて証明せよ。

問題6 A 県と B 県において、ある政党への支持率を調査した。A 県から無作為に抽出した 300 人のうち 90 人、B 県から無作為に抽出した 200 人のうち 35 人が支持すると回答した。A 県と B 県の政党支持率をそれぞれ p_A と p_B とする。必要に応じて付表を参照すること。

- (1) 政党支持率 p_A は 4 割未満であると言えるか、有意水準 5% で検定せよ。
- (2) 政党支持率 p_A と p_B に差があると言えるか、有意水準 5% で検定せよ。

付表 1：標準正規分布表： $Q(z) = \int_0^z \phi(t)dt$. 但し、 $\phi(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986

付表 2：

$\sqrt{2} = 1.414$	$\sqrt{3} = 1.732$	$\sqrt{5} = 2.236$	$\sqrt{6} = 2.449$	$\sqrt{7} = 2.646$	$\sqrt{10} = 3.162$
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	--------------------	---------------------