令和７年度学群編入学試験

# 理工学群数学類

# 学　力　検　査
# （専門科目）
# 問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅲの全問題について解答すること。
② 解答用紙は各問題に対して１枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。
③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。
④ 下書き用紙は採点しない。
⑤ 試験時間は 120 分です。

**問題 I** 実数を成分とする $n$ 次正方行列全体からなる集合 $M_n(\mathbb{R})$ を行列の和とスカラー倍を演算とする $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなす．行列 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ のトレース $\operatorname{tr} A$ は，$A$ の対角成分の総和として

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

で定まる．以下の問いに答えよ．

(1) $(i, j)$ 成分が 1 で他のすべての成分が 0 であるような $n$ 次正方行列を $E_{ij}$ で表す．$n^2$ 個の行列 $E_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ．

(2) 写像 $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $f(A) = \operatorname{tr} A$ で定める．このとき $f$ は線形写像であることを示せ．

(3) $M_n(\mathbb{R})$ の部分集合 $V$ を

$$V = \{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0 \,\}$$

で定める．このとき，$V$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示し，その次元 $\dim V$ を求めよ．

(4) 正則行列 $P \in M_n(\mathbb{R})$ に対して，$M_n(\mathbb{R})$ の部分集合 $W$ を

$$W = \{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = 0 \,\}$$

で定める．このとき，$W$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることを示し，その次元 $\dim W$ を求めよ．

**問題 II**　以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ $(t \in \mathbb{R})$，$\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ $(t \in \mathbb{R})$ について，

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

を示せ．

(2) 関数 $\tanh t = \dfrac{\sinh t}{\cosh t}$ $(t \in \mathbb{R})$ の逆関数を求めよ．

(3) $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x/2,\ x^2 - y^2 \leq 1 \right\}$ と定義する．このとき，重積分

$$\iint_D \frac{1}{(1 + x^2 - y^2)^2}\, dxdy$$

を求めよ．

**問題 III**　以下の問いに答えよ．

(1) 集合 $A$，$B$，$C$ に対して，

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

を示せ．

(2) $\varnothing$ を空集合とする．$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ とし，実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して $B(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x - a \leq 1\}$ とする．$A \cap B(a) = \varnothing$ となるような $a$ の範囲を求めよ．

(3) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 4x + 3 = 0 \}$，$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - 5y + 4 = 0 \}$，$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \}$ とする．$A \cap B \cap C$ の要素の個数を求めよ．