令和７年度応用理工学類編入学試験
学力検査問題

令和６年７月１３日(土)　１０：００～１２：３０

注意事項

1）この冊子には，数学1，数学2，物理学1，物理学2，化学1，化学2の計6題の問題がある。「物理学1，物理学2，化学1，化学2」の中から2題を選択し，数学1，数学2と合わせて計4題を解答すること。下記の表も参照すること。

問題	解答用紙の種類	解答用紙の枚数	備考
数学1	罫線あり	1枚	必須
数学2	罫線あり	1枚	
物理学1	罫線あり	1枚	この中から2題選択
物理学2	罫線あり	1枚	
化学1	罫線あり	1枚	
化学2	罫線あり	1枚	

2）解答用紙の所定欄に学群，学類，氏名，及び受験番号を記入すること。

3）すべての解答用紙の氏名欄の下の1行の欄に解答する問題名，すなわち，「数学1」，「数学2」，「物理学1」，「物理学2」，「化学1」，「化学2」のいずれかを明記すること。必要なら，解答用紙の裏も解答に用いてよい。

4）机の上には「受験票」，「鉛筆」，「消しゴム」，「鉛筆削り」，「時計(計時機能だけのもの)」，「眼鏡」以外のものを置かないこと。

数学１　試験問題

１．以下の問いに答えよ。

(1)　次の有理関数の不定積分を求めよ。

$$\frac{7}{2x^2+5x-3}$$

(2)　次のカテナリー（懸垂線）の長さを求めよ。ただし$0 \leq x \leq a$とする。

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

(3)　2 つの曲線 $y=x$ と $y=x^2$ で囲まれた領域を D とする。このとき次の二重積分を求めよ。

$$\iint_D xydxdy$$

(4)　関数 $z=\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$ が描く曲面 S において，点$(1,1,\,e^{-1})$における接平面の方程式を求めよ。

２．以下の問いに答えよ。ただし，n は自然数とする。

(1)　次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \int_1^{n+1}\frac{dx}{x}$$

(2)　(1)の不等式と次の不等式

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx > \frac{2}{n\pi}$$

が成り立つことを用いて，次の広義積分が無限大に発散することを示せ。

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

数学２　試験問題

1. 次の連立方程式について，aを実数の定数として以下の問いに答えよ。

$$\begin{aligned} x - y - z &= -1 \\ ax + 2y + 3z &= 3 \\ 3x + y + az &= 2 \end{aligned}$$

(1) 連立方程式の解が１組に決まる条件を係数行列の行列式を用いて示せ。また，そのときのaの条件を示せ。

(2) 解がない場合のaの値を求めよ。

(3) 解が一意に定まらない場合のaの値を求めよ。またその解が，任意定数tを用いて$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \\ 0 \end{pmatrix}$で与えられる場合，定数$c_1, c_2, c_3, c_4$を求めよ。

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ。ただし，θは実数の定数である。

(1) 行列Aの転置行列を ${}^tA$で表す場合，${}^tAA$を求めよ。

(2) 行列Aの固有値λ_1，λ_2を求めよ。ただし，固有値λ_1，λ_2は複素数である。

(3) 行列Aの固有値λ_1，λ_2に対する固有ベクトル$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$を求めよ。

(4) A^n　($n = 1, 2, 3, \ldots$) を求めよ。

物理学１　試験問題

惑星の周りを惑星探査機が平面内で運動している状況を考える。惑星は，図１のように，xy 平面内の原点 O に位置するとし，時刻tにおける探査機の位置を(x,y)，惑星から探査機までの距離をrとする。探査機には惑星から，惑星と探査機を結ぶ直線に沿って力$\boldsymbol{F}$が働く。力$\boldsymbol{F}$の大きさは，関数$f(r)$の絶対値 $|f(r)|$ であり，$f(r) > 0$のときは惑星と反対の向きに，$f(r) < 0$のときは惑星の向きに働く。惑星の質量をM，探査機の質量を$m\ (\ll M)$とし，惑星と探査機の大きさは無視でき，惑星は原点から動かないものとする。探査機に働く$\boldsymbol{F}$以外の力は無視できるとして，以下の問いに答えよ。

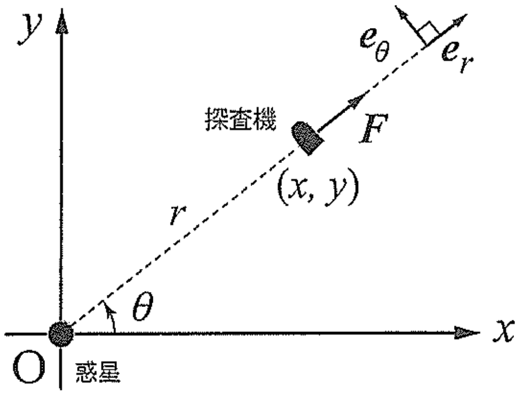


図１

(1) 時刻tにおける原点と探査機を結ぶ線分とx軸のなす角θを用いて，探査機の位置を$(x,y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$と表すとき，探査機の運動エネルギー$K$を，$m, r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}$ のうち必要なものを用いて表せ。ここに $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ である。

(2) 探査機の加速度を次の形に表すとき，空欄アに入る数式をできるだけ簡単な形で表せ。$r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ のうち必要なものを用いること。ここに $\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}$, $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ である。

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \boxed{\quad ア \quad} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

(3) 探査機に関する運動方程式を，$\boldsymbol{e}_r$方向および$\boldsymbol{e}_\theta$方向に分けて書け。ここに $\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ は動径方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ は$\boldsymbol{e}_r$に直交する単位ベクトルである。

(4) 探査機の面積速度 $h = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$が時刻$t$によらないことを示せ。

（次ページに続く）

次に，$f(r) = -\frac{GMm}{r^2}$ とした場合を考える（Gは万有引力定数）。探査機は，図２に示すように，無限遠の点 A から双曲線軌道を描きながら惑星に近づき，惑星の左側のx軸上の点 B を通って，別の無限遠の点 C に到達する。OB 間の距離をl，惑星と双曲線の漸近線の距離をd，x軸と漸近線のなす角をφとして，以下の問いに答えよ。なお，探査機は点 A と点 C の近くでは漸近線上を動いていると考えてよい。

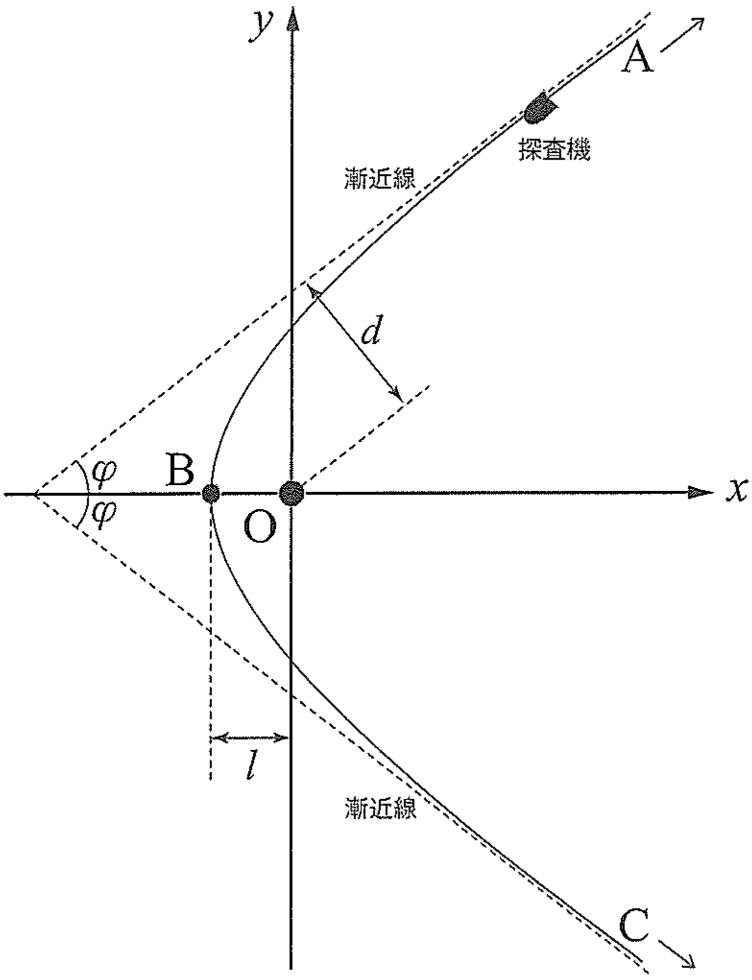


図２

(5) lを，G, M, m, d, v_0のうち必要なものを用いて表せ。ただし，$h = \frac{1}{2}v_0 d = \frac{1}{2}v_1 l$であることを用いて良い。ここで$v_0, v_1$は，それぞれ点 A，点 B における探査機の速さとする。

(6) 探査機が点 A から点 C に至るまでに，惑星が探査機に与える力積のx成分とy成分を，それぞれm, v_0, φ のうち必要なものを用いて表せ。

物理学２　試験問題

図１のような真空中におかれたz方向に無限に延びる内半径a, 外半径b ($a < b$) の円筒がある。真空の誘電率と透磁率をε_0，μ_0とし，任意の点 P を円柱座標系 (r,θ,z)で表すとき，以下の問いに答えよ。

(1) 円筒に定常電流Iが$+z$方向に流れたとき, 円筒の内側 ($r < a$) および外側 ($r > b$) に発生する静磁場の磁束密度$\boldsymbol{B}$の大きさを求め，$\boldsymbol{B}$の向きを答えよ。

次に，円筒が誘電率εの誘電体であるとし，円筒の内部（$a \le r \le b$）に密度ρの電荷が一様に分布しているときを考える。点 P における静電ポテンシャルをϕとする。

(2) 円筒の内側，内部，外側の静電ポテンシャルについてのポアソン方程式を示せ。

(3) 円筒の外側（$r > b$）の静電ポテンシャルを求めよ。積分定数は残したままでよい。ただし，円柱座標系における以下の関係式（2 階微分可能な任意の関数$f(r,\theta,z)$がrにのみ依存するときに成立する）を使用してよい。

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{df(r)}{dr}\right]$$

(4) 円筒の内部（$a \le r \le b$）および内側（$r < a$）の静電ポテンシャルを求めよ。積分定数は残したままでよい。

(5) ポアソン方程式の解は適切な境界条件を与えれば一意に決定される。静電ポテンシャルの基準を $r = b$ のときに $\phi = 0$ としたとき，解を一意に決定するための $r = a,\ b$ における境界条件を ϕ, $d\phi/dr$, ε, ε_0 を使って答えよ。

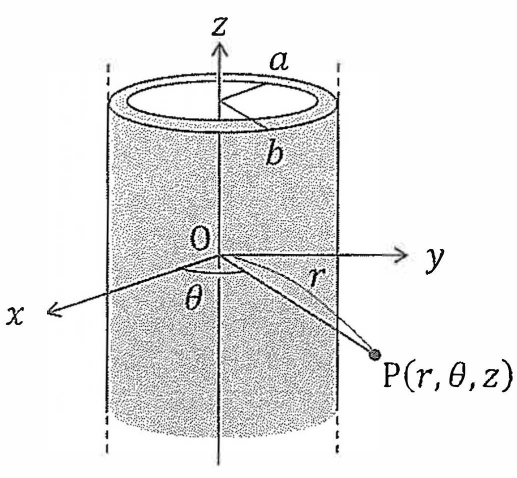


図 1

化学 1　試験問題

1．弱酸の水溶液の pH を計算するとき，弱酸の酸解離定数 K_a が小さい場合には，水溶液中における水の解離を考慮する必要がある。いま，25 ℃において，3.00×10^{-4} M フェノール水溶液の pH を以下の手順にしたがって計算する。ただし，水溶液中のフェノールの K_a は 1.00×10^{-10} M とし，水のイオン積 K_w は 1.00×10^{-14} M^2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) 以下の文章中の空欄ア～カに当てはまる式または数値を記入せよ。ただし，アとイは各化学種の平衡時の濃度$[H^+]$, $[A^-]$, $[OH^-]$, $[HA]$から必要なものを用いて記せ。ウは$[H^+]$, $[OH^-]$, 解離前の弱酸濃度 C_{HA} を，エは$[H^+]$, C_{HA}, K_w を，オは C_{HA}, K_w, K_a を用いて記せ。カは小数第 2 位までの数値を記入せよ。必要なら，$\log_{10}2 = 0.30$, $\log_{10}3 = 0.48$, $\log_e 2 = 0.69$, $\log_e 3 = 1.10$ を用いてよい。

弱酸（$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$）の K_a は

$$K_a = \boxed{\quad ア \quad} \qquad (式 1)$$

と表される。

水の解離を考慮するため，水のイオン積 K_w を考える必要がある。K_w は

$$K_w = [H^+][OH^-] \qquad (式 2)$$

と表される。

さらに，弱酸（$HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$）の解離前と解離後（平衡時）の物質収支が合う必要があるので，式 3 が成立する。

$$C_{HA} = [HA] + [A^-] \qquad (式 3)$$

溶液内の陽イオンと陰イオンの全電荷数は等しくなければならないため，式 4 が得られる。

$$\boxed{\quad イ \quad} \qquad (式 4)$$

（次ページに続く）

K_aを$[H^+]$, $[OH^-]$, C_{HA}を用いてまとめると，式 5 となる。

$$K_a = \boxed{\quad ウ \quad} \qquad (式 5)$$

いま，(i)pH = 6 ~ 7 であると仮定すると，$C_{HA} - ([H^+] - [OH^-]) \approx C_{HA}$と近似できる。したがって，

$$K_a = \boxed{\quad エ \quad} \qquad (式 6)$$

となり，

$$[H^+] = \boxed{\quad オ \quad} \qquad (式 7)$$

となる。したがって，3.00×10^{-4} M フェノール水溶液の pH は，

$$pH = \boxed{\quad カ \quad}$$

と求められる。

(2) (1)の文章中の下線部(i)に関して，このように近似できる理由を，C_{HA}, $[H^+]$, $[OH^-]$を用いて 100 字程度で記せ。

（次ページに続く）

2．レーザーとは誘導放出により光を増幅し放出させる仕組みである。

波長 $\lambda = 1.1 \times 10^{-5}$ m の光を強度 1.0×10^{3} J s^{-1} で放出するレーザーについて，以下の問いに答えよ。ただし，光の振動数 ν と λ の関係は次のとおりである。

$$\nu = c\lambda^{-1}$$

c は光速であり $c = 3.0 \times 10^{8}$ m s^{-1} とする。

また 1 光子のエネルギー E と ν との関係は次のとおりである。

$$E = h\nu$$

h はプランク定数であり $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s とする。

(1) このレーザー光の 1 光子あたりのエネルギーをジュール[J]単位で，有効数字 2 桁で答えよ。

(2) このレーザーから 1 秒間に放出される光子数を有効数字 2 桁で答えよ。

(3) このレーザー光が断熱容器中の液体の水 100 cm^{3} に全て吸収され，温度上昇に使われるとき，水温が 10 K 上昇するのに要する時間を有効数字 2 桁で答えよ。ただし，液体の水の比熱は 4.2 J g^{-1} K^{-1}，液体の水の密度は 1.0 g cm^{-3} であり温度に対して一定とする。

化学２　試験問題

1. 以下の化合物のルイス構造式をそれぞれ書け。

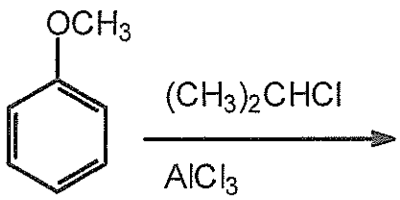
(1)　酢酸エチル, (2) アセトニトリル, (3) ホルムアルデヒド

2. 以下の化合物の構造式をそれぞれ書け。

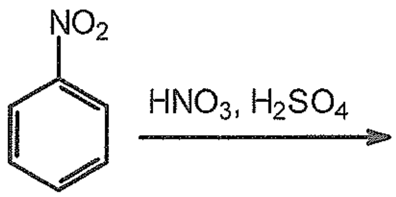
(1) アセトアニリド, (2) マロン酸, (3) 2-メチル-2-ブテン

3. 以下の反応の主生成物(有機化合物)の構造式を書け。

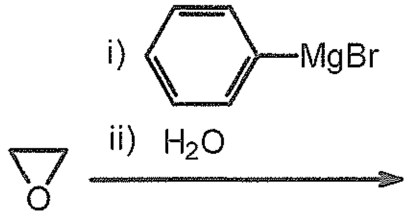
(1)



(2)



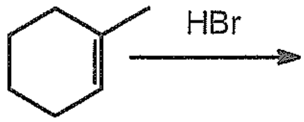
(3)



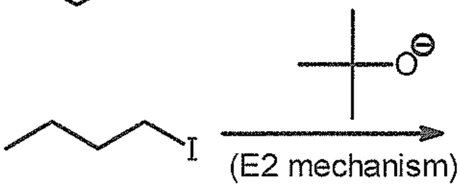
（次ページに続く）

4. 以下の反応の主生成物(有機化合物)の構造式を書け。また，電子対の動きを表す巻矢印を用いて，その反応機構を示せ。ただし，1 段階の合成反応とは限らない。

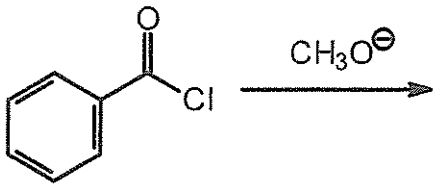
(1)



(2)



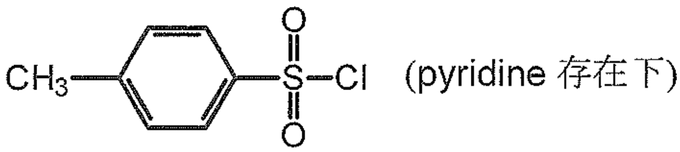
(3)



5. (1)～(3)の試薬を 1-ブタノールに反応させたときの主生成物(有機化合物)の構造式をそれぞれ書け。

(1)

(2)



(3) $SOCl_2$

6. プロパンのねじれ型配座と重なり型配座をニューマン投影式を用いて書け。