令和7年度

試験名：学群編入学試験　　　　　　　　【　　　理工学群　　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題1	(1)〜(5) 下記

問題1

(1)

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}5\sqrt{6}\\ -\sqrt{6}\end{pmatrix},\quad c=18$$

(2) 固有方程式：

$$|\alpha E-A|=(\alpha-4)(\alpha-6)=0$$

より，固有値は $\alpha=4,6$．長さ 1 の固有ベクトルは，例えば，

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ (\alpha=4\ のとき),\quad \boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\ (\alpha=6\ のとき)$$

(3) $\boldsymbol{Z}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$，$P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とすると，

${}^t\boldsymbol{z}A\boldsymbol{z}+2\,{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{z}+c={}^t\boldsymbol{Z}({}^tPAP)\boldsymbol{Z}+2\,{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{Z}+c$ より，

$$4X^2+6Y^2+8\sqrt{3}X-12\sqrt{3}Y+18=0$$

＊固有ベクトルの取り方/並べ方によって答えは異なる．

(4) (3) で得た式を平方完成すると，

$$\frac{(X+\sqrt{3})^2}{3}+\frac{(Y-\sqrt{3})^2}{2}=1$$

である．したがって，$(s,t)=(X+\sqrt{3},Y-\sqrt{3})$．

＊固有ベクトルの取り方/並べ方によって答えは異なる．

(5) 変数 (x,y) を変数 (s,t) への変数変換は，

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}.$$

つまり，この変換は座標軸を $\frac{\pi}{4}$ を回転させ，原点を $\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\0\end{pmatrix}$ 方向に平行移動するものである．

令和7年度

試験名:学群編入学試験　　　　　　　　【　　　理工学群　　社会工学類】

問題2	(1) 余因子展開より， $\lvert A\rvert = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$. (2) (1) より，$a,b,c,d$ が相異なるとき，$\lvert A\rvert \neq 0$ であり，行列 A は正則である． (3) 多項式が 4 つの点すべてを通る条件は, $\begin{cases} h_0 + h_1x_1 + h_2x_1^2 + h_3x_1^3 = y_1 \\ h_0 + h_1x_2 + h_2x_2^2 + h_3x_2^3 = y_2 \\ h_0 + h_1x_3 + h_2x_3^2 + h_3x_3^3 = y_3 \\ h_0 + h_1x_4 + h_2x_4^2 + h_3x_4^3 = y_4 \end{cases}$. この連立方程式を行列・ベクトル表示すると, $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} \boldsymbol{h} = \boldsymbol{y}$. (4) (3)で求めた 4 次正方行列を B とする．多項式が一意に決まるとは，上記の連立方程式が唯一の解を持つことである（$\boldsymbol{h} = B^{-1}\boldsymbol{y}$）．つまり，行列 B が正則であることを示せばよい． (1) の結果を用いると， $\lvert B\rvert = \lvert {}^tB \rvert = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$ であり，$x_i\ (i = 1,2,3,4)$ はすべて異なるため，$\lvert B\rvert \neq 0$．したがって，多項式が一意に決まることが示された．

問題３

(1) $f(x)$ の導関数は，

$$f'(x)=\frac{x}{\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{\beta+x^2}}\right)^2\left(\sqrt{\beta+x^2}\right)^3}.$$

であり，区間 $(0,u)$ で明らかに $f'(x)>0$ を満たす．また，

$$f'(x)=\frac{x}{\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{\beta+x^2}}\right)^2\left(\sqrt{\beta+x^2}\right)^3}<\frac{x}{\sqrt{\beta+x^2}}<\frac{u}{\sqrt{\beta+u^2}}\ (<1)$$

ただし $\left(\frac{x}{\sqrt{\beta+x^2}}\right)'=\frac{\beta}{\left(\sqrt{\beta+x^2}\right)^3}>0$

以上より，題意が示された．

(2) 仮定より，$g(u)>0$．また，

$$g(0)=-\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^{-1}<0$$

より $g(0)<0<g(u)$ であり，中間値の定理より，$g(x)=0$ を満たす点 $x^*\in(0,u)$ が少なくとも 1 つ存在する．また，$f'(x)<1\Leftrightarrow g'(x)=1-f'(x)>0$ より $g(x)$ は区間 $(0,u)$ で狭義単調増加関数である．したがって，$g(x)=0$ を満たす点は唯一である．

(3) $x_n>x^*$ であるとすると，平均値の定理より，

$$\frac{f(x_n)-f(x^*)}{x_n-x^*}=f'(c_n)$$

となる c_n が区間 (x^*,x_n) に存在する．また，$x_{n+1}=f(x_n), f(x^*)=x^*$ より，

$$\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=f'(c_n)\Leftrightarrow(x_{n+1}-x^*)=f'(c_n)(x_n-x^*).$$

ここで，$0<f'(x)<1$ であるので，$x^*<x_{n+1}<x_n$．なお，$x_0>x^*$ より，帰納法により $x_n>x^*$ も成り立つ．

(4) (3) の結果より，数列 $\{x_n\}$ は狭義単調減少数列であり，かつ，下に有界である．したがって，数列 $\{x_n\}$ は極限を持つ．
また，(3) で用いた関係式を繰り返し用いると，

$$\begin{aligned}0<(x_n-x^*)&=f'(c_{n-1})(x_{n-1}-x^*)=f'(c_{n-1})f'(c_{n-2})(x_{n-2}-x^*)=\cdots\\&=\prod_{k=0}^{n-1}f'(c_k)\,(x_0-x^*)\quad(\text{ただし，}c_k\in(x^*,x_k))\\&=\left(\frac{u}{\sqrt{\beta+u^2}}\right)^n(x_0-x^*)\end{aligned}$$

$0<\frac{u}{\sqrt{\beta+u^2}}<1$ であるため，$\lim_{n\to0}x_n=x^*$．

令和7年度

試験名:学群編入学試験　　　　　　　【　理工学群　　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題4	(1) $f_x(x,y)=\alpha e^{\alpha x}\sin(\beta y)$，$f_y(x,y)=\beta e^{\alpha x}\cos(\beta y)$ より， $$z=f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0)=\beta y$$ (2) $f_{xx}(x,y)=\alpha^2 e^{\alpha x}\sin(\beta y)$，$f_{xy}(x,y)=\alpha\beta e^{\alpha x}\cos(\beta y)$， $f_{yy}(x,y)=-\beta^2 e^{\alpha x}\sin(\beta y)$， $f_{xxx}(x,y)=\alpha^3 e^{\alpha x}\sin(\beta y)$，$f_{xxy}(x,y)=\alpha^2\beta e^{\alpha x}\cos(\beta y)$， $f_{xyy}(x,y)=-\alpha\beta^2 e^{\alpha x}\sin(\beta y)$，$f_{yyy}(x,y)=-\beta^3 e^{\alpha x}\cos(\beta y)$ より， $$\begin{aligned} z =&\ \beta y+\frac{1}{2}\left(x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)\right)\\ &+\frac{1}{6}\left(x^3f_{xxx}(0,0)+3x^2yf_{xxy}(0,0)+3xy^2f_{xyy}(0,0)+y^3f_{yyy}(0,0)\right)\\ =&\ \beta y+\alpha\beta xy+\frac{1}{2}\alpha^2\beta x^2y-\frac{1}{6}\beta^3y^3 \end{aligned}$$ (3) $$\nabla g(x,y)=\begin{pmatrix} g_x(x,y)\\ g_y(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x+4\\ -\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ $$\nabla^2 g(x,y)=\begin{pmatrix} g_{xx}(x,y) & g_{xy}(x,y)\\ g_{yx}(x,y) & g_{yy}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$ (4) 任意の $v={}^t(v_1,v_2)\neq 0$ に対して， $${}^tv\nabla^2 g(x,y)v=-2v_1^2-\frac{1}{2}v_2^2<0$$ が成り立つため，ヘッセ行列は負定値である． (5) $\nabla g(x,y)=0$ を満たす点 $(2,1)$ について，ヘッセ行列が負定値であるので，点 $(2,1)$ で極大値 $g(2,1)=0$ をとる．

令和7年度

試験名：学群編入学試験　　　　　【　理工学群　社会工学類】

区　分	標準的な解答例又は出題意図
問題5	(1) $\mathrm{E}(X_i) = p\cdot 1 + (1-p)\cdot 0 = p,\ \mathrm{Var}(X_i) = p\cdot(1-p)^2 + (1-p)\cdot(0-p)^2 = p(1-p)$ より， $$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = p, \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{p(1-p)}{n}$$ (2) $\lvert z_i - \mu\rvert \geq t\sigma$ を満たす i の集合を G とし，分散 σ^2 の定義式より， $$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(z_i-\mu)^2 \geq \sum_{i\in G} p_i(z_i-\mu)^2 \geq \sum_{i\in G} p_i(t\sigma)^2$$ 両辺を $(t\sigma)^2$ で割ると，以下の関係式が成り立つ． $$\frac{1}{t^2} \geq \sum_{i\in G} p_i = \mathrm{P}(\lvert Z-\mu\rvert \geq t\sigma)$$ (3) $n = 2500$，$t\sigma = 0.1$ とする．$p(1-p) \leq 1/4$ より，以下の関係式が成り立つ． $$\mathrm{P}(\lvert Y-p\rvert < 0.1) \geq 1 - \frac{1}{t^2} = 1 - 100\sigma^2 = 1 - \frac{p(1-p)}{25} \geq 1 - \frac{1}{100} = 0.99$$

令和7年度

試験名:学群編入学試験 【 理工学群 社会工学類】

区　　分	標準的な解答例又は出題意図
問題6	(1) 帰無仮説 H_0 : $p_A = 0.4$, 対立仮説 H_1 : $p_A < 0.4$ と設定する．A 県の標本サイズは $n_A = 300$, 標本比率は $\bar{p}_A = 90/300 = 0.3$ である．$p_0 = 0.4$ とするとき，検定統計量は $$T = \frac{\bar{p}_A - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = \frac{0.3 - 0.4}{\sqrt{0.4(1-0.4)/300}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx -3.54$$ となる．有意水準 5% の片側検定により，$-3.54 < -1.65 = -z(0.05)$ となるので帰無仮説 H_0 は棄却され，政党支持率は 4 割未満であると言える． (2) 帰無仮説 H_0 : $p_A = p_B$, 対立仮説 H_1 : $p_A \neq p_B$ と設定する．B 県の標本サイズは $n_B = 200$, 標本比率は $\bar{p}_B = 35/200 = 0.175$ である．$\bar{p} = (90+35)/(300+200) = 0.25$ とするとき，検定統計量は $$T = \frac{\bar{p}_A - \bar{p}_B}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = \frac{0.3 - 0.175}{\sqrt{0.25 \cdot 0.75 \cdot \left(\frac{1}{300} + \frac{1}{200}\right)}} = \sqrt{10} \approx 3.16$$ となる．有意水準 5% の両側検定により，$3.16 > 1.96 = z(0.025)$ となるので帰無仮説 H_0 は棄却され，母比率 p_A と p_B に差があると言える．