令和７年度

理工学群　数学類
外国学校経験者特別入試

小　論　文
試　験　問　題

注意事項

① 試験時間は１２０分です．全部で３問あり，すべてに解答してください．

② 問題ごとに解答用紙１枚ずつを使用し，各解答用紙の左上に問題の番号を明記してください．

③ 解答が書ききれない場合は，「裏へ」と明記した上で，その解答用紙の裏面に続けて書いてください．ただし，上部は５，６cm程あけてください（採点時には隠れてしまいます）．

問題 I

(1) $5m + 2n^2 = 2025$ を満たす自然数の組 (m, n) の個数を求めよ.

(2) すべての実数 θ について $\sin 3\theta = \alpha \sin^3 \theta + \beta \sin \theta$ となるような実数 α と β を求めよ.

(3) a を実数とする. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 (3^n a)}{3^n}$ を求めよ.

問題 II　a を正の実数, b を負の実数とする.

$$f(x) = x^3 - 3ax^2, \quad g(x) = \frac{3}{a}x^2 + b$$

とする. また, 曲線 $y = f(x)$ と放物線 $y = g(x)$ はちょうど 2 つの共有点をもつとし, 曲線 $y = f(x)$ と放物線 $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を S とする.

(1) b を a を用いて表せ.

(2) S を a を用いて表せ.

(3) a が正の実数を動くとき, S の最小値を求めよ.

問題 III　m を自然数とする. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す.

(1) $S_n = n^2$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) $S_n = n^m$ のとき, a_n は実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を用いて

$$a_n = \alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2 + \cdots + \alpha_m n^{m-1}$$

と表されることを示し, α_m を求めよ.

(3) $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{m-1}$ とする. b_n は実数 $\beta_1, \ldots, \beta_{m+1}$ を用いて

$$b_n = \beta_1 + \beta_2 n + \beta_3 n^2 + \cdots + \beta_{m+1} n^m$$

と表されることを示し, β_{m+1} を求めよ.