令和７年度

理工学群　数学類
国際バカロレア特別入試

小　論　文
試　験　問　題

注意事項

① 試験時間は１２０分です．全部で３問あり，すべてに解答してください．

② 問題ごとに解答用紙１枚ずつを使用し，各解答用紙の左上に問題の番号を明記してください．

③ 解答が書ききれない場合は，「裏へ」と明記した上で，その解答用紙の裏面に続けて書いてください．ただし，上部は５，６cm程あけてください（採点時には隠れてしまいます）．

問題 I

(1) $5m+2n^2=2025$ を満たす自然数の組 (m,n) の個数を求めよ．

(2) すべての実数 θ について $\sin 3\theta=\alpha\sin^3\theta+\beta\sin\theta$ となるような実数 α と β を求めよ．

(3) a を実数とする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3(3^n a)}{3^n}$ を求めよ．

問題 II　a を正の実数，b を負の実数とする．

$$f(x)=x^3-3ax^2,\quad g(x)=\frac{3}{a}x^2+b$$

とする．また，曲線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ はちょうど 2 つの共有点をもつとし，曲線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を S とする．

(1) b を a を用いて表せ．

(2) S を a を用いて表せ．

(3) a が正の実数を動くとき，S の最小値を求めよ．

問題 III　m を自然数とする．数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す．

(1) $S_n=n^2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $S_n=n^m$ のとき，a_n は実数 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ を用いて

$$a_n=\alpha_1+\alpha_2 n+\alpha_3 n^2+\cdots+\alpha_m n^{m-1}$$

と表されることを示し，α_m を求めよ．

(3) $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^{m-1}$ とする．b_n は実数 $\beta_1,\dots,\beta_{m+1}$ を用いて

$$b_n=\beta_1+\beta_2 n+\beta_3 n^2+\cdots+\beta_{m+1}n^m$$

と表されることを示し，β_{m+1} を求めよ．