令和８年度学群編入学試験

理工学群物理学類

学　力　検　査
（専門科目）
問　題　冊　子

注意事項

① 問題Ⅰ～Ⅲのすべてに解答すること。

② 解答用紙は各問題に対して１枚使用し、それぞれの解答用紙には「問題Ⅰ」のように問題番号を明記すること。

③ 解答が書ききれない場合には、「裏へ」と明記して、その解答用紙の裏面に続けて書くこと。

④ 下書き用紙は採点しない。

⑤ 試験時間は 120 分です。

問題 I

太陽系外惑星は 1995 年に初めて発見された。太陽系外惑星の発見手法については様々な方法が提案されているが、ここでは惑星と恒星の重力相互作用を利用する方法を考える。そこで簡単のために惑星１つと恒星１つからなる系を考え、その間に働く力を重力だけとする。惑星と恒星は質点とみなし、惑星の質量をm、恒星の質量をM、重力定数をGとして、これらは時間に依存せず、この系の重心を原点に取った図１のような極座標$(\mathrm{r}, \theta, \varphi)$を採用する。
以下の問いに答えよ。

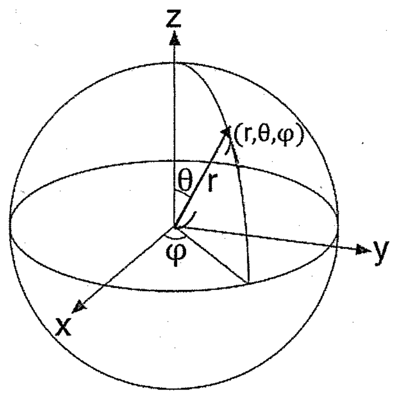


図１

問1. 図１の極座標$(\mathrm{r}, \theta, \varphi)$で表示されるベクトル$\vec{r}$の時間変化の大きさの２乗は、時間を$t$として係数$A$を用いて次式で記述できる。

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = \left(\frac{d\mathrm{r}}{dt}\right)^2 + A\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

この係数Aを、r、θ、φのうち必要なもので表せ。

問2. この系のラグランジアンをm、M、G、$\vec{r_r}$、$\vec{r_g}$や、それらの時間微分のうち必要なものを使って表せ。ここで$\vec{r_r}$は恒星から見た惑星の相対位置ベクトル、$\vec{r_g}$はこの系の重心の位置ベクトルである。
なお、この系のように中心力のみが働く質点系のラグランジアンLは、系の運動エネルギーTと位置エネルギーVを用いて$L = T - V$となり、位置ベクトル$\vec{r}$、速度ベクトル$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$で表される質点の運動方程式は、下式のようになる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

問3.　この系の重心が等速直線運動をすることを示せ。

問4.　重心に対して静止している観測者からは、惑星の運動は常に同一平面内に存在するように見える。その理由を説明せよ。

このような系では一般に、惑星は恒星の位置を一つの焦点とする楕円軌道を運動することが知られているが、以下の問題では、惑星は系の重心を中心とした半径aの円周上を等速円運動していると近似できるとする。この時、恒星は、図２のように重心を挟んで惑星と反対側にあり、系の重心を中心とした等速円運動を惑星とは逆向きに行なっている。

問5. 恒星の速さVをm、M、G、aのうち必要なもので表せ。

図２のように惑星の公転軌道面上にあって、aに比べて十分遠方にあり、系の重心に対して静止している観測者を考える。惑星からの光は弱すぎて観測することは困難であるが、恒星からの光の波長λのドップラー効果による変化を観測できれば惑星の存在を知ることはできる。恒星が静止している場合には波長λ_0の光を発するものとする。また光速度をcとして、恒星の速度Vはcよりも十分小さいとする。

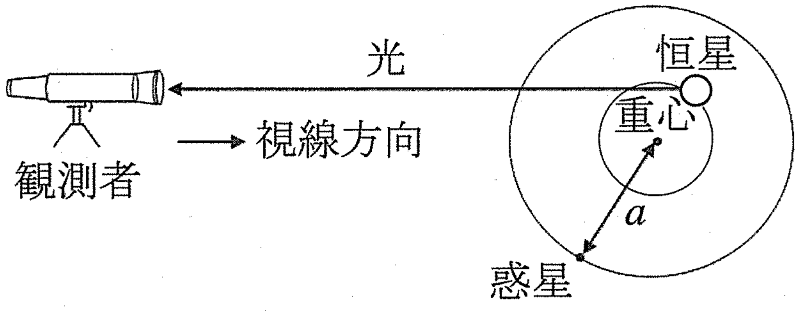


図２

問6. 恒星からの光の波長の変化量$\Delta\lambda$を、図２で示した恒星の速度の視線方向成分V_rとc、λ_0を用いて表せ。

問7. 前問で得た$\Delta\lambda$は時間変化する。$\Delta\lambda/\lambda_0$の最大値が観測技術で決まる値δ_mよりも大きければ、観測者は$\Delta\lambda$の時間変化を検出できるとすると、発見可能な惑星のaが満たすべき条件式をm、M、G、c、δ_mのうち必要なもので表せ。

問題 II

図 1 のように、容量Cのコンデンサーと抵抗Rを起電力Vの電池に導線で直列につなぐ。コンデンサーは図 2 のように半径aの平行な円形の極板 2 枚で作られている。その中心軸からの距離をrとする。極板間は真空で、極板間の距離は半径aに比べて十分小さい。時刻$t = 0$で回路のスイッチを閉じたとき、時刻tにおいて回路に流れる電流を$I(t)$、コンデンサーの各極板に蓄えられる電荷を$\pm Q(t)$とする。時刻$t = 0$で$Q(0) = 0$とし、時刻tで電荷は極板上に一様に蓄えられるものとする。真空の誘電率と透磁率をそれぞれε_0、μ_0とし、電源の内部抵抗と導線の抵抗は無視できるものとする。このとき、C、R、V、a、r、t、ε_0、μ_0のうち、必要なものを用いて以下の問いに答えよ。

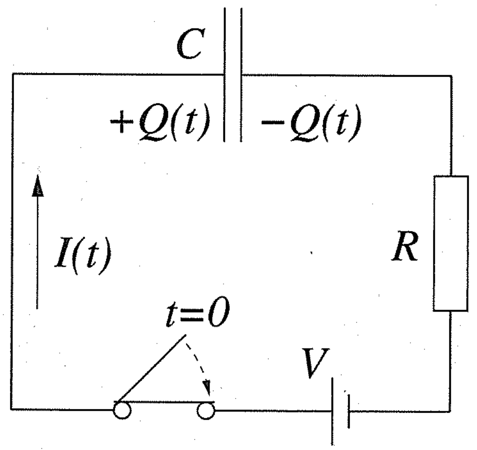


図 1

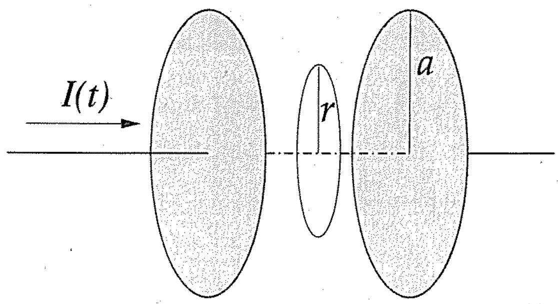


図 2

問 1． 電流$I(t)$の時間に関する微分方程式を書け。

問 2． 問 1 の微分方程式を解いて電流$I(t)$の時間変化を求め、電流の時間変化を図示せよ。

問 3． 電荷$Q(t)$の時間変化を求め、電荷の時間変化を図示せよ。

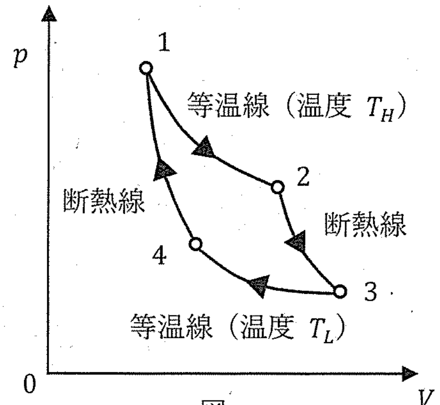
問 4． 時刻tにおける電源の仕事率、抵抗で発生するジュール熱、コンデンサーの静電エネルギーの増加率を求めよ。

問 5． 時刻tにおけるコンデンサーの極板間に生じる電場の大きさ$E_c(t)$を求めよ。

問 6． コンデンサーの極板間で、中心軸に垂直な半径r $(r < a)$の円を貫く変位電流の時刻tにおける大きさを求めよ。

問題 III

モル数 n の理想気体に下図のような準静的循環過程を行わせる。ただし、状態 1 から状態 2 は温度 T_H の熱源に接触した等温膨張、状態 2 から状態 3 は断熱膨張、状態 3 から状態 4 は温度 T_L の熱源に接した等温圧縮、状態 4 から状態 1 は断熱圧縮である。また、状態 i の圧力と体積をそれぞれ p_i、V_i $(i = 1,2,3,4)$、気体定数を R とし、定積モル比熱 C_V と定圧モル比熱 C_p は一定であるとする。$(\partial x/\partial y)_z$ は、z が一定の下での x の y についての偏微分を表す。このとき、以下の問いに答えよ。



図

問1.　気体が状態1から状態2に変化する間に外界になした仕事を、n、R、T_H、V_1、V_2 を用いて表せ。

問2.　気体が状態 1 から状態 2 に変化する間に熱源から供給された熱量を、n、R、T_H、V_1、V_2 を用いて表せ。

問3.　理想気体では定積モル比熱 C_V と定圧モル比熱 C_p の間に以下で示す Mayer の関係式が成り立つ。

$$C_p - C_V = nR$$

このことから、準静的断熱過程において pV^γ が一定（Poisson の式）であることを示せ。ただし、$\gamma \equiv \frac{C_p}{C_V} > 1$ である。

（次頁に続く）

問4. 気体が状態2から状態3に変化する間に外界になした仕事を、n、R、γ、T_H、T_L を用いて表せ。

問5. 温度 T_H の熱源から吸収した熱量 Q_H と温度 T_L の熱源から吸収した熱量 Q_L の間に、以下の関係式（Clausius の等式）が成り立つことを示せ。

$$\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_L}{T_L} = 0$$

以下、微少量 dT に対し $T_L = T_H - dT$ と書ける場合を考える。

問6. 断熱過程の体積変化は無視できるほど小さく、$V_2 = V_3$ および $V_4 = V_1$ としてよい。このとき、問5で定義した熱量 Q_H と Q_L、および圧力 p、体積 V、温度 T の間に以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$Q_H + Q_L = dT \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV$$

問7. 問5および問6で示した関係式を用いて、圧力 p、体積 V、温度 T、内部エネルギー U の間に以下の関係式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]$$